Die spezielle Relativitätstheorie

Michael Fowler, University of Virginia

(Übers.: Christoph Scholz, Hildegardis–Schule Hagen)

3. Juni 2001

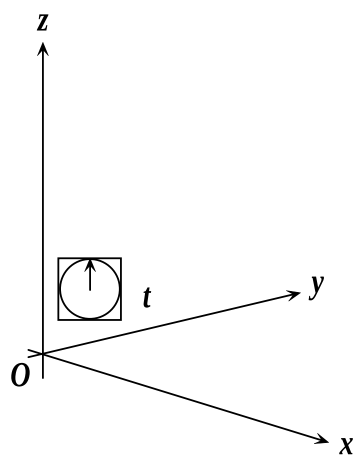
Inhaltsverzeichnis

1 Bezugssysteme und die Newton'schen Gesetze

Der Grundstein der speziellen Relativitätstheorie ist das Relativitätsprinzip:

Die physikalischen Gesetze haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form.

Wir werden sehen, dass viele überraschende Konsequenzen aus dieser überflüssig wirkenden Aussage folgen. Zunächst wiederholen wir jedoch einmal die Newton'sche Mechanik unter dem besonderen Gesichtspunkt der Bezugssysteme.

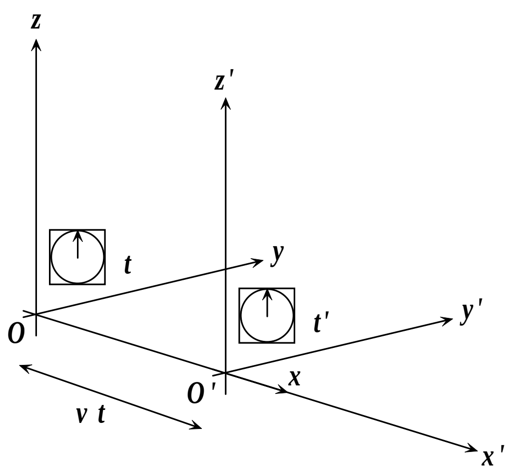


Ein „Bezugssystem“ ist nur ein Satz Koordinaten — etwas, das man benutzt, um die bei Problemen der Newton'schen Mechanik wesentlichen Größen zu messen, wie zum Beispiel Positionen und Geschwindigkeiten, daher benötigen wir zusätzlich noch eine Uhr.
Ein Punkt im Raum wird durch seine drei Koordinaten (x, y, z) festgelegt, ein „Ereignis“ , wie zum Beipiel eine kleine Explosion, durch einen Ort und einen zugehörigen Zeitpunkt — (x, y, z, t).
Ein Inertialsystem ist definiert als ein Bezugssystem, in dem das Newton'sche Trägheitsgesetz gültig ist, das heißt, dass ein Körper, auf den keine äußere Kraft einwirkt, seinen Bewegungszustand nicht ändert: er bleibt entweder in

Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig weiter. Ein Beispiel für ein Nichtinertialsystem ist ein rotierendes System, wie etwa ein Karussell.
Die „physikalischen Gesetze“ , die wir zunächst betrachten wollen, sind diejenigen der Newton’schen Mechanik, wie sie sich in den Newton’schen Bewegungsgesetzen sowie dem Gravitationsgesetz und der Wirkung von Kräften beim Aufeinandertreffen von Körpern ausdrücken. Wenn wir zum Beispiel die Gravitationskonstante aus dem Experiment sowie die beteiligten Massen kennen, können wir ausgehend von Newtons zweitem Axiom,

$$F = m \cdot a \qquad (\text{Kraft} \;=\; \text{Masse} \;\cdot\; \text{Beschleunigung}),$$

die zukünftige Bewegung von Planeten mit großer Genauigkeit vorhersagen.
Nehmen wir einmal an, wir wissen aus den Experimenten, dass diese Gesetze der Mechanik in einem bestimmten Bezussystem gültig sind. Wie sehen sie dann in einem anderen Bezugssystem aus, das sich relativ zu dem erstgenannten bewegt? Um das herauszufinden, müssen wir einen Weg finden, wie man von der Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines bestimmten Körpers, gemessen im ersten Bezugssystem, zu den entsprechenden Größen im anderen Bezugssystem gelangt.
Offensichtlich müssen sich die beiden Systeme relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, ansonsten wäre das Trägheitsgesetz nicht in beiden gleichzeitig gültig. Wir legen zur Vereinfachung die Koordinatensysteme so, dass die Relativbewegung entlang der beiden x–Achsen zeigt. Außerdem statten wir beide Bezugssysteme mit einer Uhr aus.



Nehmen wir nun an, dass sich das System S′ bezüglich S mit der Geschwindigkeit v entlang der x–Achse bewegt. Zur Vereinfachung setzen wir den Zeitpunkt, zu dem die beiden Ursprünge O ud O′ der Koordinatensysteme übereinander liegen, als Nullpunkt der Zeitmessung fest.

Wie sehen nun die Koordinaten des Ereignisses (x, y, z, t) im System S′ aus? Es ist leicht zu erkennen, dass $t' = t$ sein muss — wir haben die beiden Uhren synchronisiert, als O und O′ identisch waren. Genauso klar geht aus der Abbildung hervor, dass $y' = y$ und $z' = z$ sind. Wir sehen auch, dass $x = x' + v \cdot t$. Daher entspricht das Ereignis (x, y, z, t) im System S dem Ereignis (x', y', z', t') in S′, wobei

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

Auf diese Weise transformieren sich Positionen bzw. Ereignisse von einem System ins andere — man nennt die Gleichungen auch die Galilei–Transformationen. Was ist aber mit den Geschwindigkeiten? Die Geschwindigkeit in S′ in der x′–Richtung beträgt

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot (x - vt) = \frac{dx}{dt} - v = u_x - v$$

Das ist sowieso klar, denn es handelt sich einfach um die Addition der beiden Geschwindigkeiten

$$u_x = u'_x + v.$$

Wie wird die Beschleunigung transformiert?

$$\frac{du'_x}{dt'} = \frac{du'_x}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot (u_x - v) = \frac{du_x}{dt},$$

da v konstant ist. Das heißt aber auch,

$$a'_x = a_x,$$

dass die Beschleunigung in beiden Systemen identisch ist. Auch das ist wieder offensichtlich — die Beschleunigung ist die Änderungsrate der Geschwindigkeit, und die Geschwindigkeit desselben Teilchens unterscheidet sich in den beiden Bezugssystemen nur um einen konstanten Betrag, nämlich die Relativgeschwindigkeit der beiden Systeme zueinander.
Wenn wir uns nun zum Beispiel die Bewegung unter dem Einfluss von Gravitationskräften anschauen,

$$m_1 \cdot \vec{\mathrm{a}} = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \hat{\vec{\mathrm{r}}}$$

behalten wir das gleiche Gesetz, wenn wir in ein anderes Inertialsystem wechseln, weil jeder Term in der obigen Gleichung unverändert bleibt.
Wir sollten hierbei beachten, dass $m \cdot \vec{a}$ die Änderungsrate des Impulses ist, und

diese ist in beiden Systemen die gleiche. So ist zum Beispiel bei einem Stoß, wenn der Gesamtimpuls in dem einen System erhalten bleibt, diese Impulserhaltung in allen Inertialsystemen gegeben, weil die Summe der individuellen Änderungsraten des Impulses immer Null ergibt.

2 Die Lichtgeschwindigkeit

2.1 Frühe Überlegungen zur Ausbreitung des Lichtes

Wie wir bald sehen werden, spielten die Versuche, die Lichtgeschwindigkeit zu messen, eine wichtige Rolle bei der Entstehung der Relativitätstheorie. Tatsächlich ist die Lichtgeschwindigkeit essentieller Bestandteil dieser physikalischen Theorie.
Meiner Ansicht nach findet man die ersten Aufzeichnungen, in denen die Lichtgeschwindigkeit diskutiert wird, bei Aristoteles, wo er Empedokles zitiert, dass nämlich das Licht von der Sonne eine gewisse Zeit benötigt, um die Erde zu erreichen. Aristoteles widerspricht dieser Theorie offensichtlich, und sogar Descartes dachte, dass sich das Licht instantan[1] ausbreitet. Galilei lässt in seinem Werk *„Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend"*, unfair wie immer, den Simplicio die aristotelische Position einnehmen:

> SIMP.: Die alltägliche Erfahrung lehrt, dass die Ausbreitung des Lichtes instantan sei; wenn in weiter Entfernung die Artillerie Schießübungen anstellt, so sehen wir den Glanz der Flamme ohne Zeitverlust, während das Ohr den Schall erst nach merklicher Zeit vernimmt.

Natürlich betont Galilei, dass man aus dieser Beobachtung nicht mehr schließen kann, als dass sich das Licht schneller bewegt als der Schall. Er fährt daraufhin fort, eine mögliche Messmethode vorzuschlagen, um die Lichtgeschwindigkeit zu messen. Die Grundidee besteht darin, zwei Leute mit bedeckten Laternen in großer Entfernung voneinander aufzustellen. Einer der beiden öffnet die Abdeckung der Laterne, woraufhin der zweite, sobald er das Licht sieht, ebenfalls seine Laterne öffnet. Die Durchführung wird zunächst mit geringer Entfernung der beiden Experimentatoren voneinander geübt, bis sie sich an die Reaktionszeiten gewöhnt haben, anschließend wird der Versuch mit einer Entfernung von knapp fünf Kilometern wiederholt, oder sogar mit einer noch größeren Entfernung und zwei Teleskopen als Beobachtungsinstrumenten, mit dem Ziel, zu untersuchen, ob sich das entsprechende Zeitintervall

[1] *instantan:* ohne zeitliche Verzögerung, d. h. mit unendlicher Geschwindigkeit

merklich verlängert hat. Galilei stellt fest, dass er das Experiment für Abstände unter zwei Kilometern durchgeführt hat, ohne eine zeitliche Verzögerung festzustellen. Hieraus kann man den Schluss ziehen, dass sich das Licht mindestens zehnmal schneller ausbreitet als der Schall.

2.2 Messung der Lichtgeschwindigkeit mit Hilfe der Jupitermonde

Die erste wirkliche Messung der Lichtgeschwindigkeit kam ungefähr ein halbes Jahrhundert später, im Jahre 1676. Ole Rømer, der an dem Pariser Observatorium arbeitete, hatte systematische Studien am Jupitermond Io betrieben, der in regelmäßigen Zeitintervallen von Jupiter bedeckt wurde, weil er ihn in einer gleichmäßigen Kreisbahn umrundete. Rømer fand heraus, dass die Bedeckungen des Io während mehrerer Monate immer weiter hinter dem „Fahrplan“ zurückblieben, bis sie ca. acht Minuten Verspätung hatten, woraufhin sie langsam wieder den Fahrplan einholten, bis sie nach ungefähr sechs Monaten acht Minuten Vorsprung gegenüber dem Fahrplan hatten. Dieser Zyklus wiederholte sich immer und immer wieder. Rømer bemerkte die Wichtigkeit der Zeitspanne, mit der sich der Zyklus wiederholte — sie betrug etwas über ein Jahr. Diese Zeitdauer hatte nichts mit dem Mond Io zu tun, sondern es war die Differenz zwischen zwei benachbarten Zeitpunkten, zu denen sich Erde und Jupiter am nächsten kamen. Die Bedeckungen des Io durch Jupiter lagen genau dann am weitesten gegenüber dem Fahrplan zurück, wenn die Distanz zwischen Erde und Jupiter maximal war.
Die naheliegende Erklärung dieser Beobachtung war, dass das Licht von Io (eigentlich natürlich das an Io reflektierte Sonnenlicht) Zeit benötigte, um die Erde zu erreichen, und dass es am meisten Zeit benötigte, wenn die Erde am weitesten entfernt war. Rømer entnahm seinen Beobachtungsdaten, dass das Licht etwa 22 Minuten benötigte, um die Erdumlaufbahn zu durchqueren. Das war etwas zu hoch geschätzt, so dass Newton einige Jahre später in seinen *Principia* (Buch I, Abschnitt XIV) schrieb:

> Es ist nun gesichert, ausgehend von Phänomenen bei den Jupitermonden, bestätigt durch die Beobachtungen mehrerer Astronomen, dass sich das Licht sukzessive (Bemerkung: Das heißt wohl „mit endlicher Geschwindigkeit“) ausbreitet. Es benötigt etwa sieben bis acht Minuten, um von der Sonne bis zur Erde zu gelangen.

Dies ist im wesentlichen der korrekte Wert.
Um die Lichtgeschwindigkeit herauszufinden, musste man natürlich noch die Distanz von der Erde bis zur Sonne kennen. Um 1670 wurden Versuche gestartet, die Parallaxe des Mars zu messen. Hierunter versteht man den Winkel, unter dem sich die Position des Mars (betrachtet auf dem Hintergrund der

weit entfernten Fixsterne) verschiebt, wenn man ihn gleichzeitig von zwei weit auseinander liegenden Orten auf der Erde beobachtet. Diese winzige Verschiebung konnte benutzt werden, um den Abstand zwischen Mars und Erde zu bestimmen, und damit auch die Entfernung der Erde von der Sonne, denn alle *relativen* Abstände innerhalb des Sonnensystems waren durch Beobachtungen und geometrische Überlegungen bereits bekannt. Nach Crowe („*Modern Theories of the Universe*, Dover, 1994, Seite 30), folgerten sie, dass die Entfernung zur Sonne zwischen 65 und 145 Millionen Kilometern beträgt. Vermutlich konvergierten die Messungen bald darauf zum korrekten Wert von 150 Millionen Kilometern, denn es scheint so, dass Rømer (oder vielleicht Huygens mit Hilfe von Rømers Daten kurze Zeit später) den korrekten Wert für diese Distanz verwendete, da die Lichtgeschwindigkeit zu 230 000 Kilometern pro Sekunde berechnet wurde, etwa drei Vierteln des korrekten Wertes von 300 000 Kilometern pro Sekunde. Dieser Irrtum liegt vollkommen darin begründet, dass Rømer für die Dauer der Durchquerung der Erdumlaufbahn 22 Minuten (s.o.) an Stelle des korrekten Wertes von 16 Minuten verwendete.

2.3 Die Gemeinsamkeit von Sternenlicht und Regen

Die nächste wesentliche Verbesserung bei der Lichtgeschwindigkeitsmessung fand 1728 in England statt. Der Astronom James Bradley machte eine wichtige Entdeckung, während er mit ein paar Freunden auf der Themse segelte: Die Flagge an der Mastspitze, die die Windrichtung anzeigte, veränderte ihre Position jedes Mal, wenn das Boot den Kurs änderte, obwohl die Windrichtung konstant geblieben war. Er stellte sich das Boot als die Erde auf ihrer Umlaufbahn vor, den Wind als das Licht von einem entfernten Stern, und schlussfolgerte, dass die Richtung, aus der das Sternenlicht „hereinbläst“, davon abhängen muss, in welcher Richtung sich die Erde gerade bewegt. Eine andere mögliche Analogie besteht darin, sich das Sternenlicht als an einem windstillen Tag senkrecht fallende Regentropfen vorzustellen, durch die man sich auf einer Kreisbahn bewegt. Die beobachtete Fallrichtung der Regentropfen wird dann nicht mehr senkrecht sein — mehr Regentropfen treffen Ihre Frontseite als die Rückseite. Wenn die Regentropfen also zum Beispiel mit einer Geschwindigkeit von 25 Stundenkilometern fallen, und Sie sich mit einer Geschwindigkeit von 5 Stundenkilometern im Kreis bewegen, wird der Regen für Sie als Beobachter schräg herunterfallen, so dass er eine vertikale Komponente von 25 und eine horizontale Komponente von 5 Stundenkilometern hat. Aus welcher Himmelsrichtung er zu kommen scheint hängt nur davon ab, auf welchem Teil Ihrer Kreisbahn Sie sich gerade befinden, in welche Himmelsrichtung Sie sich also gerade bewegen.

Bradley überlegte, dass die Richtung des Sternenlichtes in genau dieser Weise variieren müsse, wobei aber die Abweichung von der Vertikalen sehr viel geringer ausfällt. Die Bahngeschwindigkeit der Erde beträgt etwa 30 Kilometer pro Sekunde, und er wusste aufgrund der Vorarbeit von Rømer, dass das Licht etwa 10 000 mal schneller ist. Daher ergab sich eine Abweichung von der Vertikalen um einen Winkel, der so groß ist wie der spitze Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen eine Kathete 10 000 mal länger ist als die andere, also etwa ein zweihundertstel Grad.
Zu Tycho Brahes Zeiten hätte dieser Winkel hart an der Grenze zum überhaupt Feststellbaren gelegen, aber zu Bradleys Lebzeiten hatten sich genügend Verbesserungen durch den Siegeszug des Teleskops und weitere technische Erfindungen ergeben, um einen solch kleinen Winkel mit der erforderlichen Genauigkeit messen zu können. Bradley maß und berechnete auf diese Weise einen Wert für die Lichtgeschwindigkeit von 298 000 Kilometern pro Sekunde, mit einer Genauigkeit von etwa einem Prozent.

2.4 Schnell flackernde Laternen

Ein Nachteil der geschilderten astronomischen Methoden liegt darin, dass sie nicht so reizvoll sind wie Galileis Idee mit den zwei laternenbewaffneten Menschen. Es wäre sicherlich eindrucksvoller, die Geschwindigkeit eines Lichtstrahls zwischen zwei Punkten auf dem Erdboden zu messen, an Stelle einer mehr oder weniger indirekten Schlussfolgerung aufgrund der winzigen Verschiebung von Sternpositionen.
Leider müssen wir einsehen, dass zwei 15 Kilometer voneinander entfernte Laternen zu einer Zeitverschiebung in der Größenordnung einer zehntausendstel Sekunde führen, und es ist schwierig, eine hierür geeignete Versuchsanordnung zu finden. Dieses technische Problem wurde um 1850 von zwei französischen Rivalen, Fizeau und Foucault, mit Hilfe zweier leicht unterschiedlicher Methoden gelöst.
In Fizeaus Versuchsanordnung wurde der Lichtstrahl zwischen die Zähne eines schnell rotierenden Zahnrades geleitet, so dass die „Laterne“ ständig zwischen bedecktem und unbedecktem Zustand wechselte. Anstelle eine weit entfernten zweiten Laterne verwendete Fizeau schlicht und einfach einen Spiegel, der den Lichtstrahl in sich zurückreflektierte, wo er ein zweites Mal die Lücke zwischen den Zähnen passierte. Die Idee bestand darin, dass der Lichtpuls, der eine bestimmte Zahnlücke passierte, nur dann durch dieselbe Zahnlücke würde zurück reflektiert werden können, wenn sich das Zahnrad und mit ihm die Zähne in der Zwischenzeit nicht wesentlich weiter gedreht hätte. Es war nicht schwierig, ein Zahnrad mit hundert Zähnen herzustellen und es hunderte Male pro Sekunde rotieren zu lassen, daher konnte man eine zeitliche Auflösung in der Größenordnung einer zehntausendstel Sekunde erreichen.

Die Methode funktionierte.
Foucaults Idee basierte auf der gleichen Grundidee, aber anstelle eines Zahnrades ließ er den Lichtstrahl auf einen rotierenden Spiegel scheinen. An einem bestimmten Punkt der Spiegelrotation wurde der Lichtstrahl auf einen entfernt stehenden Spiegel reflektiert, der ihn wiederum zurück auf den Drehspiegel warf, der sich in der Zwischenzeit um einen kleinen Winkel weiter gedreht hatte. Nachdem der Lichtstrahl auf diese Weise ein zweites Mal vom Drehspiegel reflektiert worden war, konnte man die Verschiebung des Lichtstrahls, den zugehörigen Winkel und damit den Winkel, um den sich der Drehspiegel in der Laufzeit des Lichtstrahls gedreht hatte, messen. Da die Drehfrequenz des Rotationsspiegels bekannt war, konnte man auf diese Weise die Laufzeit und damit die Lichtgeschwindigkeit bestimmen. Diese Messmethode ergab die Lichtgeschwindigkeit mit einer Genauigkeit von etwa 1500 Kilometern pro Sekunde.

2.5 Albert Abraham Michelson

Albert Michelson wurde 1852 in Strzelno, Polen, geboren. Sein Vater Samuel war ein jüdischer Kaufmann, zu dem damaligen Zeitpunkt keine Eigenschaft, die zur Sicherheit der Familie beitrug. Judenverfolgungen waren in den benachbarten Städten und Dörfern an der Tagesordnung. Sie entschieden sich, die Stadt zu verlassen. Alberts vierter Geburtstag wurde in Murphy's Camp, Calaveras County, etwa achtzig Kilometer südöstlich von Sacramento, gefeiert, ein Ort wo man von eineinhalb Hektar Land Goldstaub im Wert von fünf Millionen Dollar schürfen konnte. Samuel wurde reich durch den Verkauf von Schürfgerät an die Goldsucher. Als die Goldvorkommen erschöpft waren, zogen die Michelsons nach Virginia City, Nevada, um, in eine Silberminenstadt namens Comstock. Albert besuchte eine High School in San Francisco. Im Jahre 1869 entdeckte sein Vater eine Anzeige in der Lokalzeitung, dass der Kongressabgeordnete Fitch einen Stipendiaten benennen würde, der die Marineakademie in Annapolis besuchen solle, und dass hierfür Bewerbungen erwünscht seien. Albert bewarb sich für dieses Stipendium, bekam es aber nicht. An seiner Stelle wurde der Sohn eines Bürgerkriegsveteranen bevorzugt. Nichtsdestotrotz wusste Albert, dass Präsident Grant seinerseits zehn Stipendiaten benennen würde, also reiste er mit der soeben eröffneten Kontinentaleisenbahn an die Ostküste, um dort sein Glück zu versuchen. Ohne Michelsons Wissen schrieb der Abgeordnete Fitch direkt einen Brief zu Alberts Gunsten an Grant, in dem er argumentierte, Alberts Annahme würde zu dem Ziel beitragen, die Juden von Nevada in das Lager der republikanischen Partei hinünberzuziehen. Dieses Argument zog. Obwohl zu dem Zeitpunkt, zu dem Michelson und Grant aufeinandertrafen, bereits alle zehn Stipendien vergeben waren, zauberte der Präsident noch ein elftes Stipendium aus dem Hut. Von den anfänglich 92 Studenten graduierten vier Jahre später ganze 29. Michelson wurde erster in Optik, aber fünfundzwanzigster in Seemannskunst. Der Leiter der Akademie, Rear Admiral Worden, der die Monitor in ihrem Sieg über die Merrimac befehligt hatte, sagte zu Michelson: *„Wenn Sie in Zukunft Ihre Aufmerksamkeit weniger den wissenschaftlichen als den Seekriegsangelegenheiten widmen würden, könnte irgendwann einmal eine Zeit kommen, in der Sie Ihrem Land ein wenig nützlich sein können."*

2.6 Segeln auf ruhiger See: Das Relativitätsprinzip von Galilei

Kurz nach seiner Graduierung wurde Michelson an Bord des Segelschiffs USS *Monongahela* befohlen, zu einer Fahrt durch die Karibik hinunter nach Rio. Gemäß Michelsons Biographie *„The Master of Light"*, geschrieben von seiner Tochter Dorothy Michelson Livingston, dachte er während der ruhigen Fahrt durch die Karibik viel darüber nach, ob man innerhalb des Schiffsrumpfes ohne Blick nach draußen entscheiden könne, ob sich das Schiff bewege oder nicht. An dieser Stelle zitiert Michelsons Tochter eine berühmte Passage von Galilei (*„Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das ptolemäische und das kopernikanische"*, Zweiter Tag):

> [SALV.] Schließt Euch in Gesellschaft eines Freundes in einen möglichst großen Raum unter dem Deck eines großen Schiffes ein. Verschafft Euch dort Mücken, Schmetterlinge und ähnliches fliegendes Getier; sorgt auch für ein Gefäß mit Wasser und kleinen Fischen darin; hängt ferner oben einen kleinen Eimer auf, welcher tropfenweise Wasser in ein zweites enghalsiges darunter gestelltes Gefäß träufeln lässt. Beobachtet nun sorgfältig, solange das Schiff stille steht, wie die fliegenden Tierchen mit der nämlichen Geschwindigkeit nach allen Seiten des Zimmers fliegen. Man wird sehen, wie die Fische ohne irgend welchen Unterschied nach allen Richtungen schwimmen; die fallenden Tropfen werden alle in das untergestellte Gefäß fließen. Wenn Ihr Euerem Gefährten einen Gegenstand zuwerft, so btaucht Ihr nicht kräftiger nach der einen als nach der anderen Richtung zu werfen, vorausgesetzt, dass es sich um gleiche Entfernungen handelt. Wenn Ihr, wie man sagt, mit gleichen Füßen einen Sprung macht, werdet Ihr nach jeder Richtung gleich weit gelangen. Achtet darauf, Euch aller dieser Dinge sorgfältig zu vergewissern, wiewohl kein Zweifel obwaltet, dass bei ruhendem Schiffe alles sich so verhält. Nun lasst das Schiff mit jeder beliebigen Geschwindigkeit sich bewegen: Ihr werdet — wenn nur die Bewegung gleichförmig ist und nicht hier- und dorthin schwankend — bei allen genannten Erscheinungen nicht die geringste Veränderung eintreten sehen. Aus keiner derselben werdet Ihr entnehmen können, ob das Schiff fährt oder stille steht. [...] Wenn Ihr Euerem Gefährten einen

> Gegenstand zuwerft, so braucht Ihr nicht mit größerer Kraft zu werfen, damit er ankomme, ob nun der Freund sich im Vorderteile und Ihr Euch im Hinterteile befindet oder ob Ihr umgekehrt steht. Die Tropfen werden wie zuvor in das untere Gefäß fallen, kein einziger wird nach dem Hinterteile zu fallen, obgleich das Schiff, während der Tropfen in der Luft ist, viele Spannen zurücklegt. [...] Die Ursache dieser Übereinstimmung aller Erscheinungen liegt darin, dass die Bewegung des Schiffes allen darin enthaltenen Dingen, auch der Luft, gemeinsam zukommt. Darum sagte ich auch, man solle sich unter Deck begeben; denn oben in der freien Luft, die den Lauf des Schiffes nicht begleitet, würden sich mehr oder weniger deutliche Unterschiede bei einigen der genannten Erscheinungen zeigen. So würde unzweifelhaft der Rauch ebensoweit zurückbleiben wie die Luft selbst. [...]
>
> [SAGR.] Obgleich es mir zur See niemals in den Sinn gekommen ist, die genannten Beobachtungen eigens zu diesem Zwecke anzustellen, so bin ich doch mehr als gewiss, dass sie zu dem angeführten Ergebnis führen. So z. B. weiß ich noch, dass ich mich in meiner Kajüte hundertmal gefragt habe, ob das Schiff fahre oder stille stehe; und manchmal habe ich, in Gedanken vertieft, geglaubt, es gehe in der einen Richtung, während es sich nach der entgegengesetzten bewegte. Darum bin ich nunmehr völlig zufireden gestellt und fest überzeugt von der Bedeutungslosigkeit aller Versuche, die Geschwindigkeit oder Richtung der Bewegung eines Schiffes in seinem Inneren festzustellen, solange sich das Schiff geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Die letzte Bemerkung Sagredis wurde von mir umformuliert, um sie innerhalb dieses Kontextes sinnvoller zu gestalten. Diese Schlussfolgerung Galileis, dass nämlich in einem geschlossenen Raum alle physikalischen Gesetze in gleicher Form gelten, egal ob er sich gleichförmig bewegt oder nicht, nennt man *Galilei'sches Relativitätsprinzip*. Wir werden später darauf zurückkommen.

2.7 Michelson misst die Lichtgeschwindigkeit

Bei seiner Rückkehr nach Annapolis wurde Michelson zum Fähnrich ernannt, und im Jahre 1875 wurde er Dozent für Physik und Chemie an der Marineakademie, unter Leutnant Commander William Sampson. Michelson lernte Mrs. Simpsons Nichte, Margaret Heminway, kennen, Tochter eines sehr erfolgreichen Wall Street Tycoons, der sich in New Rochelle, New York, ein Granitschloss gebaut hatte. Michelson heiratete Nargaret in einem episkopalen Brautamt in New Rochelle im Jahre 1877.

Auf seiner Arbeitsstätte in Annapolis waren gerade Demonstrationsversuche in den normalen Ablauf von Vorlesungen eingeführt worden. Sampson schlug vor, dass es ein gutes Demonstrationsexperiment wäre, die Lichtgeschwindigkeit nach Foucaults Methode zu messen. Während er den Versuch aufbaute, erkannte Michelson schnell, dass er ihn zu Gunsten einer größeren Messgenauigkeit umbauen könnte, aber hierfür benötigte er sehr viel mehr Geld, als in dem Budget für Demonstrationsexperimente zur Verfügung stand. Er ging zu seinem Schwiegervater, der ihm 2000 Dollar zur Verfügung stellte. Anstelle von Foucaults 20 Metern bis zum entfernten Spiegel, verwendete Michelson eine Distanz von etwa 700 Metern am Ufer des Severn entlang. Diese Distanz maß er mit einer Genauigkeit von etwa zwei bis drei Millimetern. Er investierte das Geld in Linsen und Spiegel von hoher Qualität, um den Lichtstrahl zu fokussieren und reflektieren. Sein endgültiges Ergebnis betrug 299 845 Kilometer pro Sekunde, mit einem möglichen Fehler von ungefähr 50 Kilometern pro Sekunde. Diese Genauigkeit war um den Faktor 20 höher als die von Foucault und machte Schlagzeilen in der New York Times, so dass Michelson schon als Endzwanziger berühmt war. Diese Messung wurde für die nächsten vierzig Jahre weithin als genaueste Messung der Lichtgeschwindigkeit akzeptiert, bis Michelson sie ein weiteres Mal maß.

3 Das Michelson–Morley–Experiment

3.1 Die Natur des Lichtes

Aus Michelsons Bemühungen im Jahre 1879 resultierte die Erkenntnis, dass sich das Licht mit 299 845 Kilometern pro Sekunde ausbreitet, mit einem Fehler von etwa 50 Kilometern pro Sekunde. Diese Messung, die mit Hilfe eines zwischen Spiegeln hin- und herreflektierten Lichtpulses in Annapolis gemacht wurde, stimmte gut mit weniger direkten Messungen überein, die auf Grundlage astronomischer Messungen gemacht wurden. Dennoch wurde hierdurch in keinster Weise die *Natur* des Lichtes erklärt. Zweihundert Jahre zuvor hatte Newton vorgeschlagen, dass Licht aus kleinen Teilchen besteht, die in einem heißen Objekt erzeugt werden, die mit großer Geschwindigkeit emittiert werden, an anderen Objekten abprallen und von unseren Augen wahrgenommen werden. Newtons Erzfeind Robert Hooke dachte dagegen, dass Licht eine Art von Wellenbewegung sein muss, wie Schall. Um seinen Standpunkt besser nachvollziehen zu können, lassen Sie uns kurz die Natur des Schalls wiederholen.

3.2 Die Welleneigenschaft des Schalls

Schall wurde in der Tat bereits von den alten Griechen ziemlich gut verstanden. Der wichtigste Punkt, den sie erkannt hatten, bestand darin, dass der Schall von einem vibrierenden Objekt erzeugt wird, wie zum Beispiel von einer Glocke, einer Saite oder einem Trommelfell. Ihre Erklärung lautete folgendermaßen, dass zum Beispiel das schwingende Trommelfell abwechselnd an der über ihm befindlichen Luft zieht und drückt, wodurch Wellen von komprimierter und dekomprimierter Luft ausgesandt werden, vergleichbar den Kräuselwellen, die auf einem ruhigen Teich durch eine Störung hervorgerufen werden. Wenn die Schallwellen das Ohr erreichen, drücken und ziehen sie mit der gleichen Frequenz wie die ursprüngliche Schwingung (d. h. mit derselben Anzahl von Stößen pro Sekunde) am Trommelfell des Ohres. Die Nerven lei-

ten dann die Informationen über die Intensität (Lautstärke) und die Frequenz (Tonhöhe) der Schallwelle an das Gehirn weiter.
Es gibt einige spezielle Eigenschaften von Schallwellen (eigentlich von allen Wellen), die an dieser Stelle wert sind, Erwähnung zu finden. Die erste Eigenschaft nennt man *Interferenz*. Interferenz kann man am einfachsten mit Wasserwellen vorführen. Wenn Sie zwei Finger in eine Wasserwanne stecken, indem Sie die Wasseroberfläche etwa dreißig Zentimeter voneinander entfernt ganz schwach berühren, und anschließend zwei Kreiswellen erzeugen, indem Sie die mit den beiden Fingern abwechselnd in das Wasser eintauchen, werden Sie feststellen, dass sich an den Stellen, wo die Kreise sich überschneiden, relativ komplizierte Wellenmuster erzeugt werden. Die wichtigste Beobachtung, die man machen kann, ist, dass an den Stellen, wo gleichzeitig zwei Wellenberge ankommen, die Wellenbewegung insgesamt verstärkt wird, wogegen sich an den Stellen, wo gleichzeitig ein Wellenberg auf ein Wellental trifft, die beiden Wellen gegenseitig auslöschen, so dass sich dort die Wasseroberfläche kaum bewegt.
Man kann diesen Effekt bei Schallwellen hören, wenn man durch zwei Lautsprecher einen konstanten hohen Ton abspielt. Wenn man sich nun durch den Raum bewegt, wird man feststellen, dass die Lautstärke des wahrgenommenen Tones sehr stark variiert. Natürlich sorgt die Reflexion an den Wänden dafür, dass das Muster insgesamt komplizierter wird. Bei normaler Musik nimmt man diese starke Schwankung in der Lautstärke *nicht* wahr, da Musik aus vielen verschiedenen Frequenzen besteht, die sich ständig verändern. Die verschiedenen Frequenzen haben ihre Lautstärkeminima an verschiedenen Orten des Raumes. Der andere Punkt, der erwähnt werden sollte, ist, dass die Töne mit hohen Frequenzen sehr viel stärker *gerichtet* sind als tiefe Töne. Es macht zum Beispiel keinen Unterschied, wo in einem Zimmer man einen Subwoofer aufstellt — die Bässe gehen einem überall durch Mark und Bein. Auf der anderen Seite ist es sehr schwierig einen Lautsprecher so zu konstruieren, dass er die hohen Töne möglichst gleichmäßig in alle Richtungen verteilt. Sehr viel Arbeit ist bislang in die Konstruktion von Hochtönern gesteckt worden, die diese Erfordernisse erfüllen. Bei einem billigen Lautsprecher sind die hohen Töne am lautesten, wenn der Lautsprecher genau in die Richtung des Zuhörers zeigt.

3.3 Ist Licht eine Welle?

Lassen Sie uns nun, unter Berücksichtigung der obigen Mini–Wiederholung der typischen Welleneigenschaften, die Frage in Angriff nehmen ob das Licht aus einem Teilchenstrom besteht oder irgendeine Art von Welle ist. Das stärkste Argument für das Teilchenbild ist die Tatsache, dass sich das Licht geradlinig ausbreitet. Man kann um die Ecke hören, zumindest in einem gewissen

Ausmaß, aber man kann sicherlich nicht um die Ecke sehen. Darüberhinaus sind beim Licht keine Interferenzphänomene direkt zu beobachten. Schließlich war es bereits lange bekannt, wie wir oben erwähnt haben, dass der Schall aus Kompressionswellen im Medium der Luft besteht. Wenn Licht eine Welle wäre, was „wellt“ sich dann? Es ist sicherlich keine Luft, die hieran beteiligt ist, denn das Licht der Sonne, ja sogar der Sterne erreicht uns durch den luftleeren Raum, der luftleer sein muss, denn sonst wären die Planeten schon längst in ihrer Bewegung um die Sonne abgebremst worden.

Trotz all dieser Einwände wurde es ab 1800 offiziell, dass es sich bei Licht *tatsächlich* um eine Art Welle handelt. Der Grund, dass diese Eigenschaft so lange unentdeckt geblieben war, liegt darin, dass die Wellenlänge *sehr* kurz ist, weniger als ein tausendstel Millimeter. Im Gegensatz dazu hat der Ton mit der kürzesten Wellenlänge, die ein Mensch noch wahrnehmen kann, eine Wellenlänge von etwa einem Zentimeter. Die Tatsache, dass sich das Licht geradlinig ausbreitet stimmt mit der oben ganannten Beobachtung überein, dass Schallwellen sich umso geradliniger (zielgerichteter) ausbreiten, je höher der Ton und damit je kürzer die Wellenlänge ist. In ganz ähnlicher Weise variieren die Interferenzmuster immer über Distanzen, die mit der Wellenlänge vergleichbar sind. Da das Licht eine solch kurze Wellenlänge besitzt, kann man daher die Variationen im Interferenzmuster nicht wahrnehmen. In Wirklichkeit stellt sich heraus, dass es beobachtbare Interferenzeffekte bei Licht gibt. Ein bekanntes Beispiel sind die vielen Farben, die man auf einer Seifenblase beobachten kann. Diese entstehen folgendermaßen: Wenn man auf eine Seifenblase schaut, sieht man das Licht, das auf der Vorder- und Rückseite der dünnen Seifenblasenhaut reflektiert wurde — die Dicke der Haut stellt sich als vergleichbar zur Lichtwellenlänge heraus. Das Licht, das an der vom Beobachter gesehen hinteren Seite der Haut reflektiert wird, hat einen etwas längeren Weg bis zum Beobachter zurückzulegen, daher benötigt es auch ein wenig mehr Zeit dort anzukommen. Was der Beobachter tatsächlich *sieht*, ist die Summe (Überlagerung, Superposition) der beiden Wellenzüge, das Licht wird hell sein, wenn sich zwei Wellenberge überlagern, dagegen dunkel, wenn Wellenberg auf Wellental trifft. Welche dieser beiden Möglichkeiten tatsächlich auf einer bestimmten Stelle der Haut beobachtet wird, hängt von der Wegstreckendifferenz der beiden Wellenzüge ab, die an der Vorder- bzw. Rückseite reflektiert werden, und das hängt wederum von dem Beobachtungswinkel und der Dicke der Haut ab.

Lassen wir nun *weißes* Licht auf die Seifenblase fallen: Weißes Licht besteht aus allen Regenbogenfarben, und diese verschiedenen Farben haben verschiedene Wellenlängen. Wir sehen daher das von verschiedenen Stellen der Blase reflektierte Licht in unterschiedlichen Farben, weil die Bedingungen „Beobachtungswinkel“ und „Seifenblasendicke“ für jede Stelle auf der Seifenblase unterschiedlich sind, so dass jeweils nur eine bestimmte Wellenlänge und damit Farbe an einem festgelegten Ort auf der Seifenblase verstärkt wird.

3.4 Wenn Licht eine *Welle* ist, was „wellt“ sich dann?

Nachdem wir akzeptiert haben, dass Licht eine Welle ist, haben wir immer noch nicht einen der oben erwähnten größeren Einwände beantwortet. Was „wellt“ sich? Wir haben Schallwellen bisher als Kompressionswellen (Transversalwellen) in Luft erörtert. In Wirklichkeit ist das nur eine von mehreren Möglichkeiten — Schall pflanzt sich auch in Flüssigkeiten, wie zum Beispiel Wasser, und Festkörpern, wie zum Beispiel in einem Stahlrohr, fort. Experimentell findet man heraus, dass sich der Schall, gleiche Ausgangsbedingungen vorausgesetzt, um so schneller ausbreitet, je schwerer das Medium zu komprimieren ist — die Teilchen springen schneller in ihre Ausgangslage zurück und die Welle bewegt sich schneller durch das Material hindurch. Bei Stoffen gleicher Elastizität bewegt sich der Schall schneller in leichteren Materialien, weil dieselbe Rückstellkraft leichtere Teilchen stärker beschleunigt. Demnach „wellt“ sich bei Schallwellen das Ausbreitungsmedium (Luft, Wasser oder Festkörper), während sich die Welle fortpflanzt. Wenn man dies als Hinweis auf die Situation beim Licht auffasst, war es nur natürlich, dass man annahm, dass Licht ebenfalls ein Ausbreitungsmedium benötigt. Dieser mysteriöse Stoff, der alles umgibt und durchdringt, wurde *Äther* genannt. Dieser Äther muss nach dieser Theorie das gesamte Weltall ausfüllen, denn sonst würden wir das Licht der Sterne nicht sehen können. (Wir könnten niemals eine Explosion auf dem Mond *hören*, weil es keine Luft gibt, die den Schall zu uns tragen könnte. Wir wollen nun ein wenig darüber nachdenken, welche Eigenschaften dieser Äther haben müsste. Weil Licht sich so schnell ausbreitet, muss er ein sehr geringes Gewicht haben und schwer zu komprimieren sein. Dennoch müsste er, wie oben angemerkt, Festkörper ohne Widerstand durch sich hindurch bewegen lassen, weil anderenfalls die Planeten abgebremst würden. Daher können wir uns ihn vorstellen als eine Art geisterhaften Wind, der permanent durch die Erde hindurchweht. Aber wie kann man seine Existenz experimentell nachweisen?

3.5 Die Suche nach dem Äther: Das Michelson–Morley–Experiment

Den Ätherwind nachzuweisen war die nächste Herausforderung, der Michelson sich stellte, nachdem er bei seiner hochgenauen Messung der Lichtgeschwindigkeit so triumphiert hatte. Natürlich ist etwas, das Festkörpern einen widerstandslosen Durchtritt ermöglicht, sehr schwierig in den Griff zu bekommen. Michelson erkannte jedoch, dass genau, wie die Schallgeschwindigkeit als relativ zur ruhenden Luft angesehen werden muss, die Lichtgeschwin-

digkeit dementsprechend relativ zum Äther ist. Das bedeutet, wenn man die Lichtgeschwindigkeit genau genug misst, könnte man die Lichtgeschwindigkeit gegen den Ätherwind mit der Lichtgeschwindigkeit mit dem Ätherwind im Rücken vergleichen, und die Differenz dieser beiden Geschwindigkeiten wäre dann die doppelte „Windgeschwindigkeit" des Äthers. Unglücklicherweise war es nicht so einfach. Alle bisherigen Experimente zur genauen Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit hatten Licht verwendet, das von einem entfernt stehenden Spiegel reflektiert wurde. Falls es einen Ätherwind entlang der Richtung zwischen den beiden Spiegeln gab, gäbe es für den Hin- und den Rückweg des Lichtstrahls einen entgegengesetzten Effekt, so dass der Gesamteffekt sehr gering ausfallen würde. Es gab keine technisch durchführbare Methode, die Lichtgeschwindigkeit ohne zwischenzeitliche Umkehr der Bewegungsrichtung des Lichtstrahls zu messen.
An dieser Stelle hatte Michelson eine geniale Idee, den Ätherwind nachzuweisen. Wie er es seinen Kindern erklärte (nach Darstellung seiner Tochter), basierte die Idee auf dem folgenden Rätsel:

> Nehmen Sie an, wir haben einen Fluss der Breite w (z. B. 24 m), und zwei Schwimmer, die beide mit der gleichen Geschwindigkeit schwimmen können (z. B. 1 Meter pro Sekunde). Der Fluss fließt mit einer konstanten Strömungsgeschwindigkeit von sagen wir 0,6 Meter pro Sekunde. Ein Wettkampf wird nach den folgenden Regeln ausgetragen: Beide Schwimmer starten am selben Punkt auf einem der beiden Ufer. Einer der beiden schwimmt auf direktem Wege über den Fluss bis zum nächstgelegenen Punkt auf dem gegenüberliegenden Ufer, wendet und schwimmt wieder zurück. Der andere bleibt auf der ursprünglichen Seite des Flusses, schwimmt eine exakt gleichlange Strecke entlang des Flussufers flussaufwärts, wendet und schwimmt den gleichen Weg flussabwärts wieder zum Ausgangspunkt zurück. Welcher der beiden Schwimmer gewinnt?

Wie betrachten zunächst einmal den Schwimmer, der flussaufwärts und zurück schwimmt. Während des Hinweges beträgt seine Relativgeschwindigkeit zum Flussufer 0,4 Meter pro Sekunde, daher benötigt er für die 24 Meter lange Strecke 60 Sekunden Zeit. Auf dem Rückweg ist er gegenüber dem Ufer 1,6 Meter pro Sekunde schnell, weswegen der Rückweg nur noch 15 Sekunden dauert. Die Gesamtzeit beträgt also 75 Sekunden.
Der Schwimmer, der die Strömung quer durchschwimmt, ist schwieriger zu untersuchen. Es reicht nicht, dass er den gegenüberliegenden Punkt am jenseitigen Flussufer einfach nur ansteuert — die Strömung würde ihn flussabwärts treiben und er käme nicht am gegenüberliegenden Punkt an (Abb. 2.1).

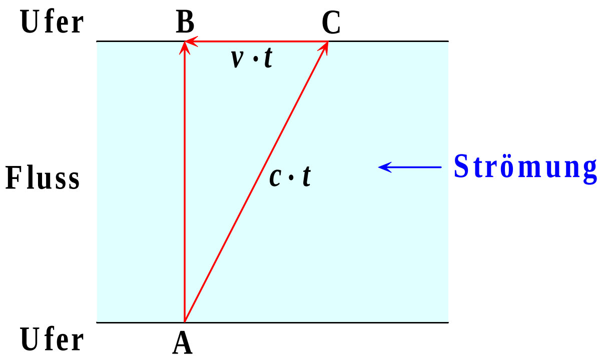


Abbildung 3.1: In der Zeit t bewegt sich der Schwimmer um die Strecke $c \cdot t$ relativ zum Wasser, und wird um die Strecke $v \cdot t$ flussabwärts getrieben.

Um auf kürzestem Wege über den Fluss zu gelangen, muss der Schwimmer im korrekten Winkel gegen die Strömung anschwimmen (ein geübter Schwimmer würde das natürlich automatisch richtig machen). Aus diesem Grunde würde der Schwimmer unter einem bestimmten Winkel zur Strömung mit der relativen Geschwindigkeit von 1 Meter pro Sekunde in Bezug auf den Fluss gemessen schwimmen, während er mit einer Geschwindigkeit von 0,6 Meter pro Sekunde flussabwärts treibt. Wenn der Winkel richtig gewählt ist, so dass die resultierende Bewegung auf kürzestem Wege über den Fluss führt, hat der Schwimmer in einer Sekunde 0,8 Meter seines direkten Weges über den Fluss zurückgelegt — die Distanzen, die er pro Sekunde zurücklegt (nämlich 0,6, 0,8 und 1 Meter) bilden ein „3–4–5–Dreieck“, das immer rechtwinklig ist. Also benötigt der Schwimmer für Hin- und Rückweg jeweils 30 Sekunden, so dass er in insgesamt 60 Sekunden seine Aufgabe erledigt hat. Der Schwimmer, der den Fluss überquert, gewinnt also. Man kann zeigen, dass dieser Schwimmer in jedem Fall der Gewinner ist, egal welche Geschwindigkeiten man ansetzt. (Eine Voraussetzung ist allerdings, dass die Schwimmer schneller sind als die Flussströmung!)

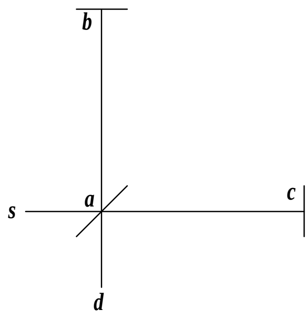


Abbildung 3.2: Dieses Diagramm entstammt der Originalarbeit. Die Lichtquelle befindet sich bei s, die 45–Grad–Linie ist der halbdurchlässige Spiegel, b und c sind Spiegel und d der Beobachter.

Michelsons großartige Idee bestand darin, ein gleichgeartetes Wettrennen zwischen Lichtwellen zu konstruieren, wobei der Ätherwind die Rolle des Flusses übernehmen sollte. Die Grundidee des Experimentes ist die folgende (siehe Abb. 2.2): Ein Lichtstrahl wird auf einen um 45 Grad geneigten halbdurchlässigen Spiegel gelenkt, so dass die Hälfte des Strahls durch den Spiegel hindurch geht, während die andere Hälfte reflektiert wird. Diese beiden „Halbstrahlen" sind die Schwimmer. Sie breiten sich weiter aus, bis sie auf zwei entfernte Spiegel treffen, die sie wieder zurück zum halbdurchlässigen Spiegel reflektieren. Hier werden sie wiederum halb reflektiert und halb durchgelassen, aber ein Teleskop ist wie in der Abbildung zu sehen hinter dem halbdurchlässigen Spiegel angebracht, so dass beide Halbstrahlen in dieses Teleskop gelangen. Falls es nun einen Ätherwind gibt, sollte jemand, der durch das Teleskop blickt, bemerken, dass die beiden Halbpulse zu leicht unterschiedlichen Zeiten ankommen, da einer der beiden Halbpulse zu einem größeren Ausmaß flussauf- und wieder -abwärts, der andere mehr flussquerend unterwegs gewesen ist. Um diesen Effekt zu maximieren, wurde die gesamte Apparatur auf einer rotierenden Scheibe aufgebaut, so dass man den Aufbau herumdrehen konnte.
Wir wollen nun darüber nachdenken, mit welcher Zeitverzögerung man zwischen den beiden Halbpulsen rechnen muss. Wenn man die Lichtgeschwindigkeit zu c annimmt sowie die „Windgeschwindigkeit" des Äthers zu v, dann wird die Strecke w gegen die Strömung des Äthers in der Zeit $t_1 = \frac{w}{c-v}$, auf dem Rückweg mit dem Äther im Rücken in der Zeit $t_2 = \frac{w}{c+v}$ zurückgelegt werden. Der gesamte Rundweg benötigt dann die Zeit

$$t_{ges} = t_1 + t_2 = \frac{2wc}{c^2 - v^2},$$

was man auch als

$$t_{ges} = \frac{2w}{c} \cdot \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

schreiben kann. Nun kann man mit Sicherheit annehmen, dass die Geschwindigkeit des Äthers sehr viel geringer ist als die des Lichtes, denn sonst hätte man den Äther sehr viel früher entdeckt, zum Beispiel bei der Bedeckung der Jupitermonde. Das bedeutet, dass der Bruch $\frac{v^2}{c^2}$ eine sehr kleine Zahl ist, und wir können daher einige praktische mathematische Zusammenhänge ausnutzen, um die Rechnung ein wenig zu vereinfachen. Zunächst kann man feststellen, das bei einer sehr kleinen Zahl x der Zusammenhang $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$ gilt, was leicht mit dem Taschenrechner überprüft werden kann. Ein weiterer Zusammenhang, den wir bald brauchen werden, ist, dass für kleine x außerdem $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ gilt. Daher kann man die Zeit, die der Lichtstrahl für beide

Wegstrecken benötigt, sehr gut durch den folgenden Ausdruck annähern:

$$t_{ges} \approx \frac{2w}{c} \cdot \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$$

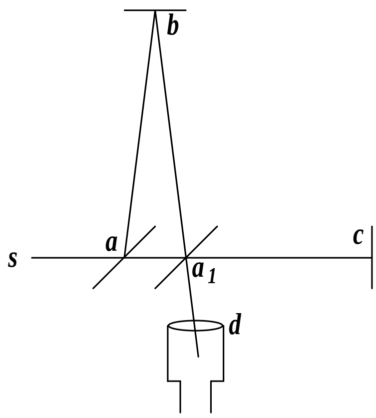


Abbildung 3.3: Dieses Bild ist ebenfalls der Originalarbeit von Michelson entnommen. Es zeigt den erwarteten Weg, den das Licht relativ zum Äther einschlägt, wenn ein Ätherwind bläst.

Wie steht es nun mit der Flussüberquerungs–Zeit? Die effektive Geschwindigkeit zur Überquerung des Flusses kann man wie in dem obigen Beispiel mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks herausfinden, wobei die Hypotenusenlänge gleich der Lichtgeschwindigkeit c ist, die kürzeste Dreiecksseite die Strömungsgeschwindigkeit v und die dritte Seite die gesuchte effektive Flussüberquerungs–Geschwindigkeit, die wir benötigen, um die Zeit zu berechnen, die benötigt wird, um den Fluss zu überqueren. Aus dem Satz des Pythagoras ergibt sich die effektive Geschwindigkeit zu $v_{eff} = \sqrt{c^2 - v^2}$. Weil diese Überlegung für beide Richtungen gleichermaßen gilt, beträgt die Gesamtdauer zur Überquerung des Flusses

$$t'_{ges} = \frac{2w}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Das kann man in der Form

$$t'_{ges} = \frac{2w}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

schreiben, was wir durch den Ausdruck

$$t'_{ges} \approx \frac{2w}{c} \cdot \frac{1}{1 - v^2/2c^2}$$

annähern können, indem wir die obige Anmerkung über Quadratwurzeln verwenden, und abschließend, indem wir $\frac{1}{1-x}$ durch $1+x$ ersetzen, schreiben wir zuguterletzt die Gesamtzeit als

$$t'_{ges} \approx \frac{2w}{c} \cdot (1 + \frac{v^2}{2c^2}).$$

Wenn man sich die beiden Gesamtdauern am Ende der beiden obigen Absätze anschaut, stellt man fest, dass sie sich um einen Betrag von

$$\Delta t = \frac{2w}{c} \cdot \frac{v^2}{2c^2}$$

unterscheiden. Nun ist $\frac{2w}{c}$ genau die Zeit, die der Lichtstrahl benötigen würde, wenn es überhaupt keinen Ätherwind geben würde, in etwa ein paar Millionstel Sekunden. Wenn wir einmal annehmen, dass die Ätherwind–Geschwindigkeit gleich der Umlaufgeschwindigkeit der Erde um die Sonne ist, dann beträgt $\frac{v}{c}$ etwa $\frac{1}{10000}$, daher ist dann $\frac{v^2}{c^2}$ ungefähr ein Einhundertmillionstel. Das bedeutet, dass der Zeitunterschied der beiden Lichtpulse nach Reflexion an den unterschiedlichen beim Erreichen des Teleskops ungefähr ein Einhundertmillionstel von ein paar Millionstel Sekunden beträgt. Es scheint vollkommen hoffnungslos zu sein, eine solch kurze Differenz in der Laufzeit der beiden Lichtpulse nachweisen zu können. Es stellte sich jedenfalls heraus, dass dies *nicht* der Fall war, und Michelson war der Erste, der herausfand, wie man es anstellen konnte.

Der Trick besteht darin, die *Interferenz*eigenschaften der Lichtwellen auszunutzen. Anstelle der oben beschriebenen Lichtpulse verwandte Michelson einen kontinuierlichen monochromatischen[1] Lichtstrahl. Dies kann man sich als Sequenz einlaufender Wellen veranschaulichen, mit einer Wellenlänge von etwa einem Zweitausendstel Millimeter. Nun wird dies Abfolge von Wellen in zwei Hälften geteilt, und in der soeben beschriebenen Weise reflektiert. Der eine Teil der Wellen bewegt sich flussabwärts und flussaufwärts, der andere geht quer über den Fluss und zurück. Schließlich treffen sie sich im Teleskop im Auge des Beobachters. Wenn der Wellenanteil, der länger benötigt hat, eine halbe Wellenlänge zurück liegt, werden seine Wellentäler auf die Wellenberge der anderen Welle treffen und sich gegenseitig auslöschen, so dass der Beobachter nichts sieht. Wenn die Verzögerung geringer ausfällt, wird man noch einen schwachen Lichteffekt beobachten. Leider würden geringste Aufstellungsfehler bei den beiden Spiegeln denselben Effekt erzeugen. Dies ist ein Grund, warum man die Apparatur drehbar aufgebaut hat. Wenn man den Aufbau um 90 Grad dreht, wechseln die beiden Halbstrahlen ihre Rollen: Aus der „flussaufwärts/–abwärts–Welle“ wird die „Flussüberquerungs–Welle“ und umgekehrt. Nun müsste die andere zurückliegen. Aus diesem

[1] aus einer einzigen Farbe bestehenden

Grunde müsste man im Falle, dass es einen Ätherwind gibt, bei der Rotation der Apparatur eine Veränderung in der Helligkeit des einfallenden Lichtes feststellen.
Um die Zeitdifferenz zwischen den beiden Wegen zu vergrößern, wurde das Licht in dem tatsächlichen Experiment mehrfach zwischen den Spiegeln hin und her geworfen, wie in einem Rennen über mehrere Runden.
Michelson berechnete, dass ein Ätherwind mit einer Geschwindigkeit von nur zwei oder drei Kilometern pro Sekunde einen beobachtbaren Effekt in diesem Experiment erzeugen würde, also wäre es sehr einfach, den Ätherwind nachzuweisen, wenn seine Geschwindigkeit vergleichbar mit der Umlaufgeschwindigkeit der Erde wäre. Es wurde *nichts* beobachtet. Die Lichtintensität veränderte sich in keinster Weise. Einige Zeit später wurde das Experiment neu entworfen, so dass ein Ätherwind, der durch die Erdrotation hervorgerufen würde, nachgewiesen werden könnte. Wiederum konnte nichts entdeckt werden. Zuguterletzt fragte sich Michelson, ob der Äther in irgendeiner Weise an der Erde „kleben" bleiben würde, wie die Luft unter Deck in einem Schiff, also wiederholte er sein Experiment auf dem Gipfel eines hohen Berges in Kalifornien. Wiederum wurde kein Ätherwind beobachtet. Es war ohnehin schwer zu glauben, dass der Äther in der unmittelbaren Umgebung der Erde an ihr kleben und sich mit ihr bewegen sollte, weil die Lichtstrahlen der Erde abgelenkt würden, wenn sie die Grenzfläche zwischen dem bewegten entfernten Äther zu dem lokalen unbewegten Äther überschreiten würden.
Die einzige mögliche Schlussfolgerung aus dieser Serie sehr anspruchsvoller Experimente war, dass das gesamte Konzept eines alles durchdringenden Äthers von vorneherein falsch war. Michelson zögerte lange, solchermaßen zu denken. Tatsächlich hatte es in den sechziger Jahren des 19. Jahrhunderts neue theoretische Einsichten in die Natur des Lichtes gegeben, und zwar durch die brilliante theoretische Arbeit von Maxwell, der einen Satz Gleichungen aufgeschrieben hatte, die beschrieben, wie sich elektrische und magnetische Felder gegenseitig bedingen. Er hatte entdeckt, dass seine Gleichungen vorhersagten, dass es Wellen geben kann, die aus elektrischen und magnetischen Feldern bestehen, und die Geschwindigkeit dieser Wellen, die sich aus den Experimenten ergab, die die Verbindung zwischen elektrischen und magnetischen Feldern untersuchten, entsprach genau der Lichtgeschwindigkeit. Hieraus ergab sich natürlich die Annahme, dass Licht aus schnell variierenden elektrischen und magnetischen Feldern besteht. Das Ganze führt aber zu einem großen Problem: Die Maxwell–Gleichungen sagen eine bestimmte Geschwindigkeit für Licht voraus, und die ist *identisch* mit der gemessenen Lichtgeschwindigkeit. Aber relativ wozu muss diese Geschwindigkeit gemessen werden? Der Grund, warum der Äther ins Spiel gebracht worden war, bestand darin, dass man das Licht in einem ähnlichen Bild wie den Schall verstehen wollte: Longitudinalwellen in einem Medium. Die Schallgeschwindigkeit misst man dementsprechend auch relativ zur Luft. Wenn der Wind auf den Beobachter zu weht, wird

der Schall früher gehört, weil sich die Schallgeschwindigkeit und die Windgeschwindigkeit zu einer erhöhten Ausbreitungsgeschwindigkeit addieren. Falls es keinen Äther geben sollte, funktioniert diese Analogie zwischen Licht und Schall nicht mehr länger. In Bezug auf was bewegt sich das Licht denn dann mit rund 300 000 Kilometern pro Sekunde?

Es gibt eine andere offensichtliche Möglichkeit, die man die Emittertheorie nennt — das Licht bewegt sich mit 300 000 Kilometern pro Sekunde relativ zur Lichtquelle. Die Analogie besteht hier in dem Licht, das von einer Lichtquelle emittiert wird und den Kugeln, die von einem Maschinengewehr abgefeuert werden. Die Kugeln kommen verlassen das Gewehr mit einer bestimmten Geschwindigkeit, die man Mündungsgeschwindigkeit nennt. Wenn man das Maschinengewehr oben auf einem Panzer montiert, der sich vorwärts bewegt, und das Gewehr ebenfalls vorwärts gerichtet ist, dann bewegen sich die Kugeln relativ zum Erdboden mit einer größeren Geschwindigkeit, als wenn sie von einem stehenden Panzer aus abgefeuert würden.

Die einfachste Möglichkeit, diese Emittertheorie zu testen, besteht darin, die Lichtgeschwindigkeit von Licht zu messen, das vorwärts von einer Lampe, die sich ihrerseits vorwärts bewegt, ausgesendet wird, und nachzumessen, ob es sich um den Betrag der Lampengeschwindigkeit schneller bewegt als Licht von einer unbewegten Lampe. Tatsächlich konnte man diesen direkten Test der Emittertheorie erst in den letzten dreißig Jahren durchführen. Es ist nun möglich, Teilchen zu erzeugen, die man neutrale Pionen nennt, die jedes in einer kleinen Explosion zerfallen, wobei ein Lichtteilchen ausgesandt wird. Es ist möglich, diese Pionen sich fast mit Lichtgeschwindigkeit bewegen zu lassen, wenn diese Explosion stattfindet, und das Licht, das von ihnen in Bewegungsrichtung ausgesandt wird, aufzufangen und seine Geschwindigkeit zu messen. Man findet, dass dieses Licht weiterhin mit der normalen Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, obwohl man eigentlich eine größere Geschwindigkeit erwarten würde, da es von einer so schnellen Quelle erzeugt wurde. Im vorletzten Jahrhundert wurde die Emittertheorie abgelehnt, weil man dachte, dass einige astronomische Effekte, wie zum Beispiel bei Doppelsternen, wo sich zwei Sterne gegenseitig umkreisen, in anderer Form erscheinen müssten. Diese Gegenargumente sind seitdem kritisiert worden, aber der geschilderte Pionentest ist unzweideutig.

3.6 Einsteins Antwort

Die Resultate der verschiedenen oben geschilderten Experimente scheinen uns auf aussichtslosem Posten zurückzulassen. Offensichtlich ist Licht etwas anderes als Schall, der eine festgelegte Ausbreitungsgeschwindigkeit bezüglich eines Mediums hat. Auf der anderen Seite ist es nicht wie Gewehrkugeln, mit einer festgelegten Geschwindigkeit bezüglich der Lichtquelle. Dennoch, immer wenn wir die Lichtgeschwindigkeit messen, erhalten wir dasselbe Messergebnis. Wie kann man alle diese Tatsachen auf eine einzige, einfache, konsistente Art und Weise erklären? Wir werden im nächsten Kapitel zeigen, wie Einstein diese Frage beantwortete.

4 Die spezielle Relativitätstheorie

4.1 Wieder einmal das Relativitätsprinzip von Galilei

An dieser Stelle des Kurses betreten wir endlich das zwanzigste Jahrhundert — Albert Einstein schrieb seine erste Arbeit über die Relativitätstheorie im Jahre 1905. Um seine Arbeit in einen größeren Zusammenhang zu stellen, wollen wir zunächst wiederholen, was man in der Physik unter Relativität versteht. Das erste Beispiel, das wir weiter oben behandelt haben, ist das, was man das Relativitätsprinzip von Galilei nennt, wobei es sich um nicht mehr handelt, als Galileis Erkenntnis, dass man in einem geschlossenen Raum durch Beobachtung der Bewegungen von belebten und unbelebten Objekten nicht entscheiden kann, ob sich der geschlossene Raum mit konstanter Geschwindigkeit bewegt oder in Ruhe ist. (Man kann feststellen, ob sich der Raum auf einer gekrümmten Bahn bewegt oder beschleunigt wird.)
Alles sieht gleich aus in einem Raum, der sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, genau wie in einem in Ruhe befindlichen Raum. Nachdem Newton seine Bewegungsgesetze formuliert hatte, in denen der Zusammenhang von Bewegungen mit Kräften beschrieben wird, schrieben die Physiker Galileis Relativitätsprinzip in einer neuen, formaleren Art und Weise um: sie sagten *die physikalischen Gesetze in einem gleichförmig bewegten Raum sind die gleichen wie in einem ruhenden Raum*. In anderen Worten: Die gleiche Kraft erzeugt die gleiche Beschleunigung, und ein Objekt, auf das keine Kraft ausgeübt wird, bewegt sich in beiden Situationen geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit. Wenn man mit solchen Begriffen argumentiert, setzt das natürlich voraus, dass man Uhren und Maßstäbe zur Verfügung hat, so dass man die Bewegung eines Körpers über eine gemessene Entfernung zeitlich beschreiben kann. Also stellt sich der Physiker den betreffenden Raum mit Kalibrierungen an den Wänden vor, so dass man den Ort jedes Körpers exakt bschreiben kann, und mit einer genau gehenden Uhr, um die Zeit zu messen. Einen solcherart ausgestatteten Raum nennt man *Bezugssystem* — die Kalibrierung an den Wänden können als System angesehen werden, das man benutzen kann, um den genauen Ort eines Objekts zu einer bestimmten Zeit festzulegen. (Dies ist gleichbedeutend mit einem Koordinatensystem.) Die Quintessenz des Gan-

zen ist jedenfalls, dass es keine Möglichkeit gibt, die Bewegung von Objekten in einem Bezugssystem so zu analysieren, dass man feststellen kann, ob sich das Bezugssystem mit konstanter Geschwindigkeit bewegt oder in Ruhe ist.
Was meinen wir nun genau mit einem Bezugssystem, das „in Ruhe" ist? Dies erscheint aus unserer Perspektive als Lebewesen, die auf der Erdoberfläche leben, als offensichtlich — wir meinen natürlich in Ruhe bezüglich fest auf der Erdoberfläche verankerter Objekte. Genauer betrachtet führt die Erdrotation aber dazu, dass man nicht unbedingt von einem ruhenden Bezugssystem sprechen kann, ganz zu schweigen davon, dass sich die Erde auf ihrer Umlaufbahn mit fast 30 Kilometern pro Sekunde um die Sonne bewegt. Aus der Sicht eines Astronauten wäre daher ein Bezugssystem, das die Sonne als festen Bezugspunkt nimmt, eher als ruhend anzusehen. Aber warum sollte man hier aufhören nachzudenken?[1] Wir glauben, dass die physikalischen Gesetze im gesamten Universum gültig sind. Wir stellen uns nun vor, wir wären irgendwo weit draußen im Universum, weit weg von der Sonne, ja sogar weit weg von unserer Milchstraße. Wir würden in allen Richtungen Galaxien sehen, die sich alle in verschiedene Richtungen bewegen. Nehmen wir an, wir legen nun ein Bezugssystem fest und stellen nun fest, dass die Newton'schen Gesetze weiterhin gültig sind. Insbesondere stellen wir fest, dass das erste Newton'sche Axiom gilt — dass sich ein Körper, auf den keine Kraft wirkt, geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. *Dieses Gesetz wird oft als Trägheitsprinzip oder Inertialprinzip bezeichnet, und ein Bezugssystem, in dem dieses Prinzip gilt, nennt man daher auch Inertialsystem.* Dann stellen wir ein neues Bezugssystem auf, das sich mit einer konstanten Geschwindigkeit in Bezug auf das vorherige Bezugssystem bewegt, und stellen wiederum fest, dass auch hier die Newton'schen Gesetze gelten. Der wichtige Punkt, den man an dieser Stelle bemerken muss, besteht darin, dass es nicht festzustellen ist, welches dieser beiden Bezugssysteme in Ruhe ist — falls man überhaupt von einem in Ruhe befindlichen Bezugssystem sprechen kann (s. o.). Nichtsdestotrotz können wir aber guten Gewissens annehmen, dass es sich bei beiden Bezugssystemen um ein Inertialsystem handelt, da wir ja in beiden überprüft haben, dass sich ein Körper, auf den keine resultierende Kraft wirkt, geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegt (diese konstante Geschwindigkeit kann natürlich auch Null sein). In dieser Situation hätte Michelson gesagt, dass ein in Ruhe befindliches Bezugssystem in Ruhe bezüglich des Äthers ist. Leider hatte sein eigenes Experiment ergeben, dass man eine Bewegung durch den Äther nicht nachweisen kann. Woher weiß man dann überhaupt, ob man sich in dem richtigen Bezugssystem befindet?
Wie wir im vorigen Abschnitt erwähnt haben, gab es in der Mitte des neun-

[1] Anm. d. Übers.: Bezüglich unserer Milchstraße ist die Sonne nicht als ruhend anzusehen, da sie sich in zweihundert Millionen Jahren einmal um das Zentrum der Galaxis dreht, diese wiederum bewegt sich relativ zu anderen Galaxien, so dass man im Grunde nirgendwo in unserem Universum einen festen, absolut ruhenden Punkt ausmachen kann.

zehnten Jahrhunderts einen bedeutenden Fortschritt im Verständnis der elektromagnetischen Felder. (Tatsächlich ist dieser Fortschritt in der Hauptsache verantwortlich für die Verbesserung unseres Lebensstandards seit jener Zeit).
Das neue Verständnis der elektromagnetischen Phänomene wurde zusammengefasst in den sogenannten Maxwell–Gleichungen, die beschreiben, wie elektrische und magnetische Felder miteinander zusammenhängen und sich gegenseitig bedingen. Dieses theoretische Gerüst ist gut vergleichbar mit der zwei Jahrhunderte vorher stattgefundenen Aufstellung der Newton'schen Axiome, die das neue Verständnis der Mechanik zusammenfassten. Die wichtige Bedeutung der Maxwell–Gleichungen für unser Thema liegt darin, dass sie Wellen vorhersagten, die aus elektrischen und magnetischen Feldern bestanden und sich mit einer Geschwindigkeit von etwa 300 000 Kilometern pro Sekunde ausbreiteten, worauf man sofort erkannte, dass es sich hierbei um keinen Zufall handeln konnte — Lichtwellen müssen also nichts anderes sein als elektromagnetische Wellen. (Diese Vorstellung von Lichtwellen ist heutzutage voll etabliert.)
Es ist wichtig zu betonen, dass Maxwells Arbeiten die Lichtgeschwindigkeit mit Hilfe von Versuchsergebnissen vorhersagten, von denen man, als man sie durchführte, niemals gedacht hätte, dass sie irgendetwas mit Licht zu tun hätten — so handelte es sich zum Beispiel um Experimente, die untersuchten, wie stark ein elektrisches Feld ist, das von einem sich veränderten Magnetfeld induziert wird. Maxwell war in der Lage, die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen zu berechnen, indem er Methoden anwandte, die zuvor von Wissenschaftlern benutzt worden waren, als sie die Schallgeschwindigkeit aus der Kenntnis der Dichte und Elastizität der Luft ableiteten.

4.2 Verallgemeinerung des Galilei'schen Relativitätsprinzips durch Einstein

Wir kommen nun zu Einsteins großer Erkenntnis, der speziellen Relativitätstheorie. Sie klingt trügerisch einfach. Einstein polierte zunächst einmal Galileis Diskussion von Experimenten im Rumpf gleichförmig bewegter Schiffe auf, und formulierte sie folgendermaßen neu:
„Die physikalischen Gesetze haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form."
Daraufhin aktualisierte er diese Formulierung, indem er betonte, dass unter „physikalischen Gesetzen" außer den Newton'schen Axiomen, die die Kräfte und Bewegungen von Massen beschreiben, nun auch die Maxwell–Gleichungen zu verstehen seien, die das Verhalten von elektrischen und magnetischen Feldern behandeln.
Die Forderung, dass die Maxwell–Gleichungen in allen Inertialsystemen die gleiche Form haben, hat für unsere Diskussion eine wichtige Konsequenz. Wie

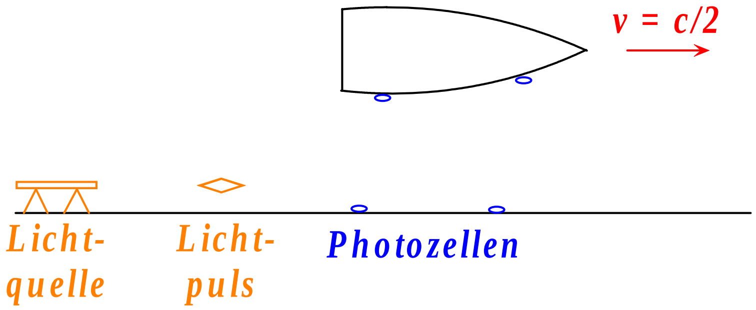
oben erwähnt ergibt sich aus den Maxwell–Gleichungen direkt die Lichtgeschwindigkeit zu 300 000 Kilometern pro Sekunde. Hieraus folgt, dass aus der Forderung, die Maxwell–Gleichungen hätten in allen Inertialsystemen die gleiche Form, folgt, *dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen 300 000 Kilometer pro Sekunde betragen muss*.
Dies ist also der gesamte Inhalt der speziellen Relativitätstheorie: Die physikalischen Gesetze sind in allen Inertialsystemen dieselben, und insbesondere die Messung der Lichtgeschwindigkeit wird in jedem Inertialsystem den gleichen Wert ergeben, nämlich 300 000 Kilometer pro Sekunde.

4.3 Man kann *wirklich* nicht feststellen, ob man sich bewegt!

Genau wie Galileo festgestellt hatte, dass einem die Beobachtung von Mücken, Fischen und tropfenden Flaschen, das Werfen von Gegenständen oder normales Herumspringen, nicht dabei helfen würde herauszufinden, ob man sich in einem ruhenden oder gleichförmig bewegten Raum befindet, ergänzte Einstein, dass keinerlei Beobachtung, *noch nicht einmal die Messung der Lichtgeschwindigkeit* mit beliebiger Genauigkeit, geeignet ist, um festzustellen, ob man sich in einem „wirklich ruhenden“ Raum befindet. Das heißt natürlich, dass das Konzept von einem „ruhenden“ Bezugssystem von vorneherein sinnlos ist. Wenn Einstein Recht hat, gibt es im gesamten Universum kein natürliches „Ruhesystem“. Dann kann es natürlich auch keinen „Äther“ geben, kein dünnes durchsichtiges Gelee, das den Raum erfüllt und in dem die Lichtwellen schwingen, denn wenn es den Äther gäbe, dann würde *er* das natürliche Ruhesystem darstellen und damit auch die Lichtgeschwindigkeit in bewegten Inertialsystemen beeinflussen, wie oben diskutiert.
Das Michelson–Morley–Experiment war also von Anfang an zum Scheitern verurteilt. Es hat niemals einen Ätherwind gegeben. Das Licht wurde nicht durch die Bewegung entgegen dem Ätherwind abgebremst — Licht bewegt sich *immer* mit derselben Geschwindigkeit, die wir ab jetzt c nennen werden ($c = 300\,000$ Kilometer pro Sekunde), um Schreibarbeit zu sparen. *Das beantwortet uns nun auch die Frage, bezüglich wozu die Lichtgeschwindigkeit gemessen wird.* Wir haben herausgefunden, dass das Licht nicht mit Schall verglichen werden kann, der sich bezüglich eines zugrundeliegenden Mediums ausbreitet. Es ist gleichfalls nicht wie Gewehrkugeln, mit einer Geschwindigkeit relativ zur Lichtquelle (gemäß der widerlegten Emittertheorie). *Licht bewegt sich mit der Geschwindigkeit c relativ zum Beobachter*, daher wird ein Beobachter, der ein Bezugssystem mit Uhren und Maßstäben kreiert, immer die Lichtgeschwindigkeit als c messen. (Hierbei nehmen wir an, dass es sich bei unseren Beobachtern jeweils um sehr kompetente Experimentatoren handelt!)

4.4 Wahrheit und Konsequenzen

Die Wahrheit, auf die wir uns hier beziehen, ist die scheinbar harmlos und plausibel klingende Aussage, dass alle Inertialsysteme gleichwertig sind — die physikalischen Gesetze haben in ihnen allen die gleiche Form —, und dass daher die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich ist. Wie wir bald sehen werden, hat diese spezielle Relativitätstheorie einige überraschende Konsequenzen, die am deutlichsten in Erscheinung treten, wenn sich die Dinge mit einer Geschwindigkeit bewegen, die c nahe kommt. Einstein bevorzugte es, seine Theorie mit Hilfe von sogenannten „Gedankenexperimenten“ zu verdeutlichen, in denen Züge und andere Transportmittel vorkamen, die sich mit solchen Geschwindigkeiten bewegen (technisch bis heute unerreichbar!), und wir werden diesem allgemeinen Ansatz folgen.



Zu Beginn wollen wir uns eine einfache Messung der Lichtgeschwindigkeit aus zwei Inertialsystemen heraus vorstellen, die sich relativ zueinander mit halber Lichtgeschwindigkeit bewegen. Der Aufbau sieht folgendermaßen aus: Auf einem ebenen Stück Land haben wir ein Blitzlicht, das einen Lichtpuls aussendet. Wir haben zwei Photozellen, Vorrichtungen, die auslösen und ein Signal durch einen Draht senden, wenn sie Lichteinfall registrieren. Die Photozellen sind eine bestimmte Strecke entlang des Weges des Lichtpulses voneinander entfernt aufgestellt, und sie sind beide an einer Uhr angeschlossen, so dass man die Zeit messen kann, die der Lichtpuls von der ersten zur zweiten Photozelle benötigt. Mit Hilfe dieser Zeit und der gemessenen Strecke zwischen den beiden Photozellen kann man die Geschwindigkeit des Lichtpulses leicht bestimmen.

In der Zwischenzeit gibt es noch einen anderen Beobachter, der die Szenerie mit einem Raumschiff mit halber Lichtgeschwindigkeit überfliegt. Er ist ebenfalls mit einem Paar Photozellen ausgestattet, die wie in der Abbildung gezeigt eine bestimmte Distanz voneinander entfernt auf dem Boden des Raumschiffs aufgestellt sind, und er ist daher ebenfalls in der Lage, die Geschwindigkeit des Lichtpulses relativ zu seinem Bezugssystem, dem Raumschiff, zu messen. *Der Beobachter auf dem Raumschiff wird die Geschwindigkeit des Lichtpulse als c relativ zu seinem Raumschiff messen, während der Beobachter auf dem Boden für denselben Lichtpuls die gleiche Geschwindigkeit, allerdings in Bezug auf sein mit dem*

Erdboden fest verbundenes Bezugssystem, messen wird. Das ist die unausweichliche Konsequenz, die sich aus der speziellen Relativitätstheorie ergibt.

Anmerkung!

Eine weitere Darstellung der historischen Entwicklung, die zur speziellen Relativitätstheorie führte, zusammen mit vielen Links auf Materialien zu den involvierten Personen, kann man im Internet unter der folgenden URL finden:

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Special_relativity.html

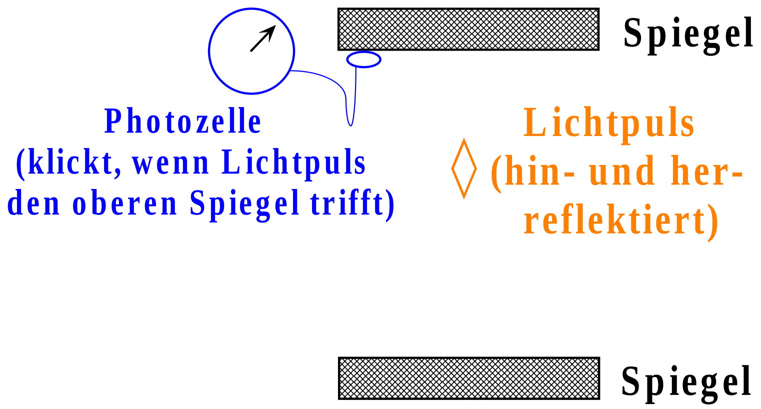
5 Spezielle Relativität: Wieviel Uhr ist es?

5.1 Alle Inertialsysteme sehen gleich aus

Einsteins spezielle Relativitätstheorie, die wir im letzten Kapitel andiskutiert haben, kann folgendermaßen zusammengefasst werden:
Die physikalischen Gesetze haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form. (Solche Bezugssysteme bewegen sich mit einer konstanten Geschwindigkeit relativ zueinander.) Diese Gesetze schließen nicht nur die Newton'schen Axiome, sondern auch die später entdeckten Maxwell–Gleichungen mit ein, die die elektromagnetischen Felder beschreiben und voraussagen, dass sich das Licht mit der Geschwindigkeit $c = 300\,000$ *Kilometer pro Sekunde ausbreitet.* **Es folgt, dass jede beliebige Messung eines Beobachters immer c für die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes ergibt, solange er sich in einem Inertialsystem befindet.**
Wir haben bereits eine Konsequenz erkannt, die unserer Intuition widerspricht, nämlich dass zwei Beobachter, die sich mit einer konstanten Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen, für denselben Lichtpuls die gleiche Geschwindigkeit c ermitteln werden, sogar dann, wenn sie sich in derselben Richtung relativ zueinander bewegen, in der sich der Lichtpuls ausbreitet.

5.2 Eine einfache, aber zuverlässige Uhr

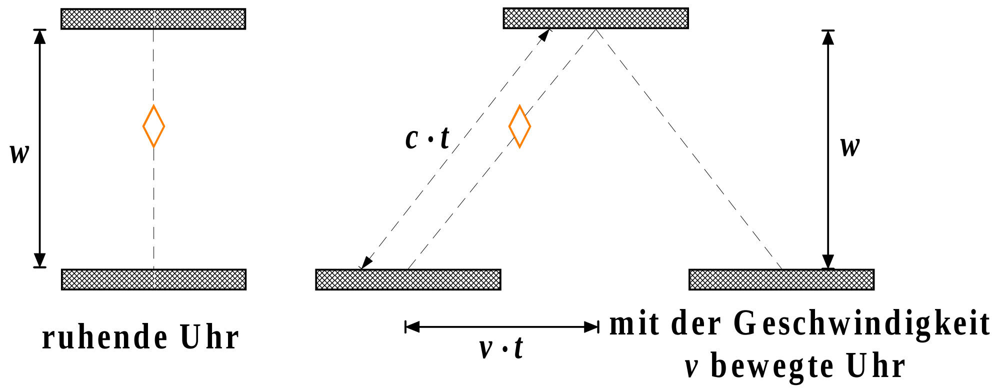
Wir haben bereits früher erwähnt, dass jedes unserer Bezugssysteme kalibriert ist (d. h. es hat eine Skalierung entlang der Wände) um Entfernungen zu messen, und dass es eine Uhr hat, um die Zeit zu messen. Nun wollen wir uns einmal die Uhr etwas genauer ansehen — wir wollen eine, die in jedem Bezugssystem gut zu verstehen bzw. abzulesen ist. Anstelle eines Pendels, das vor- und zurückschwingt, das wegen der fehlenden Schwerkraft in einiger Entfernung von der Erdoberfläche sowieso nicht funktionieren würde, verwenden wir einen Lichtpuls, der zwischen zwei parallel ausgerichteten Spiegeln hin- und herreflektiert wird. Wir nennen diese Vorrichtung eine *Lichtuhr*. Damit man diese Lichtuhr zur Zeitmessung verwenden kann, muss man einen Weg finden, um zu zählen, wie oft der Lichtpuls hin- und hergewandert ist. Aus diesem Grunde bringen wir eine Photozelle am oberen Spiegel an. Die Photozelle löst einen Zähler aus, wenn das Licht auf den oberen Spiegel trifft, und das regelmäßige Ticken des Zählers wird dann in eine Bewegung des Uhrzeigers umgesetzt, wie bei einer normalen Uhr. Natürlich wird der Betrieb der Photozelle den Lichtpuls auf die Dauer abschwächen, daher muss man Vorkehrungen treffen, den Lichtpuls von Zeit zu Zeit geeignet zu verstärken, wie zum Beispiel ein Blitzlicht, das genau zur richtigen Zeit auslöst, wenn der Lichtpuls vorbeikommt, und auf diese Weise die Intensität des Lichtpulses wieder erhöht. Zugegebenermaßen ist das eine etwas umständlich wirkende Art und Weise, eine Uhr zu konstruieren, aber die zugrundeliegende Idee ist einfach.



Es ist leicht herauszufinden, wie oft unsere Lichtuhr tickt. Wenn die beiden Spiegel einen Abstand d haben, legt der Lichtpuls auf dem Rundweg zwischen den beiden Spiegeln eine Distanz von $2d$ zurück. Da wir wissen, dass sich das Licht mit der Geschwindigkeit c fortbewegt, benötigt es für den Hin- und Rückweg zwischen den Spiegeln eine Zeit von $t = \frac{2d}{c}$, dies ist also auch der zeitliche Rhythmus, in dem die Uhr tickt. Dies ist keine sehr lange Zeit für eine vernünftig dimensionierte Uhr! Der Quartzkristall in einer Quartzuhr tickt in der Größenordnung von 10 000 mal pro Sekunde. Das würde bei unserer Lichtuhr einem Spiegelabstand von etwa 15 Kilometern entsprechen, das heißt, dass eine Lichtuhr von vernünftiger Größe etwa 1000 mal schneller tickt. Wir nehmen im folgenden an, dass solche rein technischen Probleme gelöst worden sind.

5.3 Beobachtung der Uhr eines anderen

Wir stellen uns nun zwei Beobachter vor, Jack und Jill, jeder mit einem kalibrierten Bezugssystem und einer Lichtuhr ausgestattet. Um nun konkret zu werden, stellen wir und Jack vor, wie er auf ebenem Boden mit seiner Lichtuhr neben einer gerade verlaufenden Eisenbahnstrecke steht, während Jill mit ihrer Uhr auf einem offenen Eisenbahnanhänger steht, der sich mit der konstanten Geschwindigkeit v entlang der Eisenbahnstrecke bewegt. Jack entschließt sich nun dazu, seine Lichtuhr mit der von Jill zu vergleichen. Er weiß, dass für seine Uhr die Zeit zwischen den Klicks $t = \frac{2d}{c}$ beträgt. Wir stellen uns ferner einen leicht nebligen Tag vor, so dass er mit einem Fernglas den Lichtpuls zwischen den Spiegeln von Jills Uhr hin- und herwandern sehen kann. Wie lange dauert es seiner Meinung nach, bis der Lichtpuls in Jills Uhr einmal hin und her gelaufen ist? Die einzige Sache, derer er sich sicher sein kann, ist, dass der Lichtstrahl mit einer Geschwindigkeit von $c = 300\,000$ Kilometern pro Sekunde unterwegs ist — das ist das, was Einstein ihm gesagt hat. Daher reicht es, wenn man die Zeit für eine „Rundreise" des Lichtstrahls berechnen will, wenn man die Weglänge bestimmt, die der Lichtstrahl auf dem Hin- und Rückweg zurücklegt. Diese Länge beträgt *nicht* $2d$, weil sich die Spiegel auf dem sich bewegenden Waggon befinden. Aus diesem Grund hat sich der obere Spiegel zu dem Zeitpunkt, als der Lichtpuls wieder bei ihm ankommt, um eine bestimmte Strecke weiterbewegt; der Lichtpuls bewegt sich also von außerhalb der Bahnstrecke aus betrachtet auf einer Zickzackbahn.



Wir nehmen nun an, dass der Lichtpuls in Jills Uhr auf dem offenen Waggon nach Jacks Messung von außerhalb der Bahnschienen die Zeit t benötigt, um von dem unteren Spiegel zu dem oberen Spiegel zu gelangen. Dann ist die Länge des „Zick" vom unteren zum oberen Spiegel notwendigerweise ct, weil das die Strecke ist, die jeder Lichtstrahl in der Zeit t zurücklegt. In der Zwischenzeit hat sich der Waggon um die Strecke vt weiterbewegt, wobei v die Geschwindigkeit des Waggons ist. Diese Situation sollte dem Leser bekannt vorkommen — es ist genau die gleiche Situation wie bei dem Problem mit dem flussüberquerenden Schwimmer, der mit der Geschwindigkeit c relativ zum Wasser schwimmt, welches seinerseits mit der Geschwindigkeit v fließt! Wir haben also wiederum ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse ct und den Katheten vt und d.

Aus dem Satz des Pythagoras ergibt sich dann

$$c^2t^2 = v^2t^2 + d^2,$$

so dass

$$t^2 \cdot (c^2 - v^2) = d^2$$

oder

$$t^2 \cdot (1 - \frac{v^2}{c^2}) = \frac{d^2}{c^2}$$

gilt, und wenn man auf beiden Seiten die Wurzel zieht und dann alles verdoppelt, um die Zeit zu berechnen, die das Licht für den Hin- und Rückweg benötigt, erhält man, dass Jack als Zeitraum zwischen zwei Klicks auf Jills Lichtuhr

$$t' = \frac{2d}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

misst. Das bedeutet, dass Jack die Lichtuhr von Jill als langsamer gehend wahrnimmt — gleichbedeutend mit einer längeren Zeitdauer zwischen zwei Klicks — verglichen mit seiner eigenen Uhr. Offensichtlich ist dieser Effekt bei normalen (Eisenbahn-)Geschwindigkeiten nicht sehr dramatisch. Der Korrekturfaktor beträgt $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ und unterscheidet sich von 1 nur um etwa ein Billionstel, sogar für einen Zug, der so schnell wie eine Gewehrkugel fährt! Nichtsdestotrotz ist dies ein realer Effekt, der gemessen werden kann, wie wir später noch näher erläutern werden.
Es ist wichtig, dass einem klar ist, dass der einzige Grund dafür, eine *Lichtuhr* und keinen anderen Uhrentyp zu benutzen, darin liegt, dass die Bewegung und das Ticken einer Lichtuhr leicht aus einem anderen Bezugssystem heraus analysiert werden kann. Jill könnte eine ganze Uhrensammlung auf ihrem Waggon haben und würde sie dann alle synchronisieren. Zum Beispiel könnte sie ihre Armbanduhr direkt neben die Lichtuhr hängen und sie die ganze Zeit zusammen beobachten, um sicher zu gehen, dass sie immer die gleiche Zeit anzeigen. Wir erinnern uns, dass in Jills Bezugssystem die Lichtuhr in Abständen von $\frac{2d}{c}$ Sekunden tickt, so wie sie es aufgrund ihrer Konstruktion tun muss. Von seiner Position neben den Eisenbahnschienen sieht Jack die Lichtuhr und die Armbanduhr nebeneinander und wird natürlich feststellen, dass die Armbanduhr ebenfalls um den Faktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ langsamer geht. In der Tat gehen aus Jacks Perspektive Jills Uhren *alle* um diesen Faktor nach, sogar ihr Puls. Jack kann daher sogar folgern, dass Jill langsamer altert, weil sie sich bewegt!
Aber das ist nicht die ganze Wahrheit — wir müssen nun alles aus der umgekehrten Richtung betrachten, das heißt aus Jills Perspektive. Ihr Inertialsystem

ist gleichwertig mit dem von Jack. Sie sieht, wie sich seine Lichtuhr mit der Geschwindigkeit v (rückwärts) bewegt, daher legt aus ihrer Sicht *sein* Lichtpuls den längeren Zickzack–Weg zurück, was zur Folge hat, dass *seine Lichtuhr langsamer geht als ihre.* Man kann also sagen, dass jeder von ihnen beiden die Uhr des anderen langsamer gehen sehen wird, und damit auch den anderen langsamer altern sehen wird. Dieses Phänomen nennt man *Zeitdilatation*. Diese Verlangsamung der Zeit ist in den vergangenen Jahren mit Hilfe von Atomuhren nachgewiesen worden, die man auf Düsenflugzeugen um die Welt fliegen gelassen hat, wobei man feststellen konnte, dass sie weniger Zeit gemessen haben, und zwar genau um die vorhergesagte Menge, als identische Uhren, die auf dem Boden zurückgelassen wurden. Im nächsten Abschnitt werden wir erörtern, dass die Zeitdilatation in der Elementarteilchenphysik sehr leicht zu beobachten ist.

5.4 Die Lorentzkontraktion

Wir wollen uns nun Gedanken über das nächste Rätsel machen: Wir nehmen einmal an, dass Jills Uhr mit einem Mechanismus ausgestattet ist, der jede Sekunde eine Markierung auf den Gleisen hinterlässt. Wie weit liegen diese Markierungen auseinander? Aus Jills Sicht ist das eine sehr leicht zu beantwortende Frage. Sie sieht, wie die Gleise mit der Geschwindigkeit v Meter pro Sekunde (um mit einer bequemen Einheit zu rechnen) unter ihrem Waggon vorbeifliegen. Aus diesem Grunde werden die Markierungen auch v Meter auseinander liegen. Aber Jack sieht den ganzen Vorgang anders. Er sieht Jills Uhr langsamer gehen, daher sieht er, dass die Markierungen nicht in Abständen von einer Sekunde, sondern in größeren zeitlichen Abständen auf den Gleisen angebracht werden, nämlich nur alle $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ Sekunden (so würden zum Beispiel für einen Zug, der sich mit 80% der Lichtgeschwindigkeit bewegt, die Markierungen nur alle $\frac{5}{3} = 1.67$ Sekunden durchgeführt). Weil sich Jack mit Jill darin einig ist, dass die relative Geschwindigkeit zwischen Waggon und Gleisen v Meter pro Sekunde beträgt, wird er als Abstand zwischen den Markierungen nicht etwa v Meter, sondern $\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ Meter messen, eine größere Entfernung. Wer von beiden hat Recht? Es stellt sich heraus, dass Jack richtig liegt, denn die Markierungen sind in seinem Bezugssystem, und daher kann er mit einem Bandmaß oder sonstigem Längenmessgerät zu den Markierungen hingehen und die Entfernung zwischen den Markierungen messen. Das bedeutet umgekehrt, dass Jill die Entfernung zwischen den Markierungen aus ihrem Ruhesystem heraus um den Faktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ zu klein misst. Die Entfernung zwischen den aus Jills Sicht sich bewegenden Markierungen schrumpft also verglichen mit der Entfernung, die sie in dem Bezugssystem voneinander haben, in dem sie ruhen. Diese Schrumpfung nennt man *Lorentzkontraktion*[1], und diese wirkt sich nicht nur auf die Markierungen aus, sondern auf die Gleise und auf Jack — alles sieht in der Bewegungsrichtung irgendwie zusammengequetscht aus!

5.5 Experimenteller Beweis für die Zeitdilatation: Sterbende Myonen

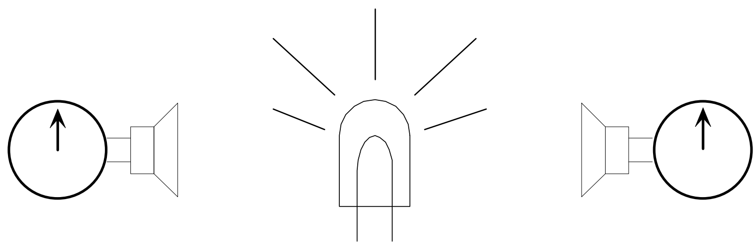
Der erste deutliche Beweis für die Zeitdilatation wurde vor über fünfzig Jahren durch ein Experiment geliefert, das Myonen nachweisen sollte. Diese Teilchen werden am äußersten Rand der Atmosphäre dadurch erzeugt, dass die kosmische Höhenstrahlung auf die äußersten Luftschichten trifft. Die Myonen sind instabile Teilchen mit einer „Halbwertszeit“ von 1,5 Mikrosekunden (1,5 Millionstel einer Sekunde). Das bedeutet, falls man zu einem bestimmten Zeitpunkt 100 Myonen hat, dann wird man 1,5 Mikrosekunden später nur noch etwa 50, weitere 1,5 Mikrosekunden später etwa 25 Myonen übrig haben, usw. Sie werden jedoch weiterhin die ganze Zeit in großer Höhe produziert, und so gibt es einen ständigen Teilchenstrom, der sich mit annähernd Lichtgeschwindigkeit in Richtung Erdoberfläche bewegt. Im Jahr 1941 wurden von einem Detektor, der nahe des Gipfels des Mount Washington in etwa 1800 Metern Seehöhe plaziert war, ein Teilchenstrom von etwa 570 Myonen pro Stunde gemessen. Diese Myonen „regnen“ quasi von oben herab, wobei sie während des Falls „sterben“, daher kann man, wenn man den Detektor tiefer aufstellt, davon ausgehen, dass er weniger Myonen misst. Wenn man ihre Geschwindigkeit mit c annähert, heißt das, dass sie sich pro Mikrosekunde um etwa 300 Meter fortbewegen. Aus diesem Grunde sollten sie 1,5 Mikrosekunden, nachdem sie die 1800–Meter–Marke passiert haben, auf grob gerechnet 1350 Meter Seehöhe angekommen sein. Da nach Ablauf dieser 1,5 Mikrosekunden etwa die Hälfte von ihnen zerfallen sein dürfte, sollte man auf 1350 Metern Seehöhe also nur noch ca. $\frac{570}{2} = 285$ Myonen pro Stunde nachweisen können. Mit demselben Argument ergeben sich in 900 Metern Seehöhe nur noch ca. 140 Myonen, in 450 Metern noch ca. 70 Myonen und in Höhe des Meeresspiegels etwa 35 Myonen pro Stunde. (Einige Zahlen sind zwar gerundet worden, doch die genannten Zahlen sind genügend nahe an den realen Werten.)
Zusammenfassend lässt sich sagen, dass wir, ausgehend von der bekannten Zerfallsrate der Myonen, und ausgehend von der Tatsache, dass 570 Myonen pro Stunde vom Detektor auf dem Gipfel des Mount Washington registriert werden, in Meereshöhe nur noch etwa 35 Myonen pro Stunde erwarten. Als

[1] Anm. d. Ü.: Im englischen Sprachraum spricht man hauptsächlich von der Fitzgerald–Kontraktion.

man den Detektor daraufhin wirklich auf Meeresniveau brachte, registrierte er stattdessen jedoch ungefähr 400 Myonen pro Stunde! Wie hatten die Myonen es fertig gebracht zu überleben? Der Grund dafür liegt darin, dass *in ihrem Bezugssystem sehr viel weniger Zeit vergangen war*. Ihre tatsächliche Geschwindigkeit beträgt etwa 99,4% der Lichtgeschwindigkeit, was mit einer Zeitdilatation um den Faktor 9 korrespondiert, daher messen die Lichtuhren der Myonen während der 6 Mikrosekunden dauernden Reise vom Gipfel des Mount Washington bis zum Meeresspiegel nur eine Zeitspanne von $\frac{6}{9} = 0,67$ Mikrosekunden. In dieser Zeit zerfallen aber nur etwa ein Viertel von ihnen.
Wie sieht das aus der Sicht der Myonen aus? Wie kommen sie in so kurzer Zeit so weit? Für die Myonen nähern sich Mount Washington und die Erdoberfläche mit einer Geschwindigkeit von 99,4% der Lichtgeschwindigkeit, oder etwa 300 Meter pro Mikrosekunde. In den 0,67 Mikrosekunden, die sie zum Erreichen des Erdbodens benötigen, sollten sie daher auch nur etwa 200 Meter zurücklegen können, wie kann es dann kommen, dass sie in dieser Zeit die gesamten 1800 Meter vom Berggipfel bis auf Meereshöhe zurücklegen konnten? Die Antwort liegt in der Lorentzkontraktion — für die Myonen ist der Mount Washington in ihrer vertikalen Bewegungsrichtung um einen Faktor von $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ zusammengequetscht, derselbe Faktor, um den sich die Zeit gedehnt hat, in diesem Fall also 9. Aus diesem Grund wirkt der Mount Washington für die Myonen, als hätte er nur eine Höhe von 200 Metern — aus diesem Grunde kommen sie ihn so schnell hinab!

6 Spezielle Relativität: Uhren synchronisieren

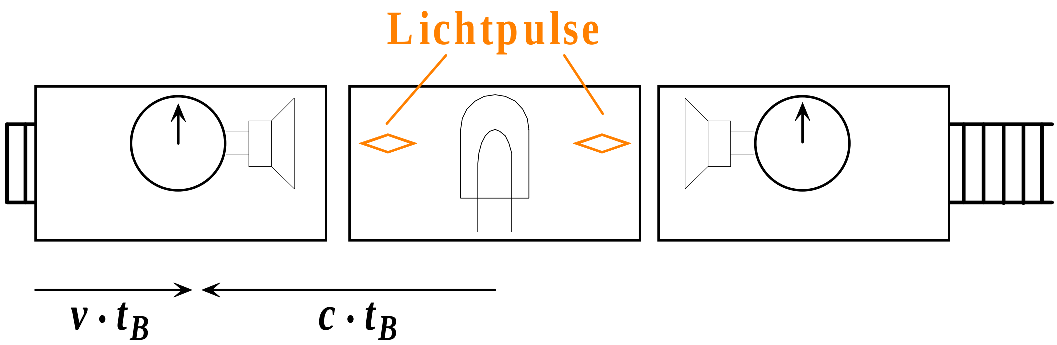
Nehmen wir an, wir wollen zwei Uhren synchronisieren, die eine bestimmte Strecke voneinander entfernt stehen.
Wir könnten uns neben eine von ihnen stellen und die andere durch ein Teleskop beobachten, aber wir müssten dabei daran denken, dass wir die entfernte Uhr *in dem Zustand sehen, als sie das Licht ausgesandt hat*, und dementsprechend müssen wir die gesehene Zeit korrigieren.
Eine andere Möglichkeit sicherzustellen, dass die beiden Uhren die gleiche Zeit anzeigen, vorausgesetzt sie gehen beide genau, besteht darin, sie gleichzeitig in Gang zu setzen. Wie kann man dabei vorgehen? Wir könnten zum Beispiel an beide Uhren eine Photozelle anschließen, so dass sie genau in dem Moment gestartet werden, wenn sie von einem Lichtstrahl erreicht werden.



Wenn wir dann ein Blitzlicht genau in der Mitte der Verbindungslinie zwischen beiden Uhren aufstellen, und das Blitzlicht zünden, wird der Lichtstrahl genau die gleiche Zeit benötigen, um an beiden Uhren anzukommen. Daher wird der Lichtpuls die Uhren gleichzeitig erreichen, und die beiden Uhren werden daher synchronisiert sein.

Wir wollen nun den gesamten Aufbau — die beiden Uhren und das mittig plazierte Blitzlicht — auf einem Zug aufbauen, und wir nehmen einmal ein, dass sich der Zug mit einer Geschwindigkeit v nach rechts bewegt, zum Beispiel mit der halben Lichtgeschwindigkeit.
Nun betrachten wir den Vorgang der Uhrensynchronisation aus der Sicht eines außen stehenden Betrachters. Ein Beobachter, der außerhalb des Zuges am Rande der Eisenbahnschienen steht, würde in der Tat sagen, dass die beiden

Uhren durch die oben beschriebene Vorgehensweise *nicht* synchronisiert worden sind! Der Grund hierfür liegt darin, dass er zwar den Lichtstrahl sich in beiden Richtungen mit der Geschwindigkeit c ausbreiten sehen würde, aber er würde auch beobachten, dass sich die Rückseite des Zuges mit der Geschwindigkeit v auf den Lichtstrahl zu bewegt, um dadurch früher auf ihn zu treffen, wohingegen sich die Vorderseite des Zuges mit v von dem Lichtstrahl weg bewegt, weshalb der Lichtpuls länger benötigt um sie einzuholen.
Es ist nicht schwierig herauszufinden, wie viel später der Blitz den Anfang des Zuges erreicht als das hintere Ende, von außen betrachtet. Hierfür erinnern wir uns zunächst daran, dass der Zug von außen gesehen die Länge $L' = L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ hat.



Wenn t_E die Zeit ist, die der Blitz benötigt, um das Ende des Zuges zu erreichen, dann wird aus der Zeichnung deutlich, dass

$$ct_B = \frac{1}{2}L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - vt_E \qquad \text{oder} \qquad vt_E + ct_E = \frac{1}{2}L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

gilt, wobei t_E durch

$$t_E = \frac{1}{c+v} \cdot \frac{1}{2}L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

angegeben werden kann. In ähnlicher Weise erhalten wir für die Zeit zum Erreichen des Anfangs des Zuges (gemessen von einem außenstehenden Beobachter)

$$t_A = \frac{1}{c-v} \cdot \frac{1}{2}L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Von außen stellt man also eine Zeitdifferenz zwischen dem Starten der beiden Uhren fest, und diese beträgt

$$t_A - t_E \quad = \quad \left(\frac{1}{c-v} - \frac{1}{c+v}\right) \cdot \frac{1}{2}L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2v}{c^2 - v^2} \cdot \frac{1}{2} L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
&= \frac{2v}{c^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{1}{2} L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
&= \frac{vL}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}
$$

Wir dürfen dabei nicht vergessen, dass diese Zeitdifferenz zwischen dem Start der beiden Uhren von einem außenstehenden Beobachter mit dessen eigenen Uhren gemessen wurde. Für diesen Beobachter erscheinen die bewegten Uhren auf dem Zug jedoch langsamer zu ticken, und zwar um den Faktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, so dass, obwohl der Beobachter die Zeitdifferenz als $\frac{vL}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ Sekunden gemessen hat, er die langsamer tickende Uhr am Zugende eine Zeit von $\frac{vL}{c^2}$ Sekunden anzeigen sieht, wenn die vordere Uhr gerade gestartet wird.

Zusammenfassung: Von außen betrachtet gehen die beiden mit der Geschwindigkeit v in x–Richtung bewegten Uhren langsamer und zeigen für jede verstrichene Sekunde nur $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ Sekunden an. Genauso wichtig ist es, dass die Uhren, die aus der Sicht des Zugfahrers synchronisiert sind, aus der Sicht des Außenstehenden nicht synchronisiert sind. Die hintere Uhr geht $\frac{vL}{c^2}$ Sekunden gegenüber der vorderen Uhr vor, wobei L die Ruhelänge des Zuges, also die Länge des Zuges aus der Sicht des Bahnfahrers, ist.

Wir sollten abschließend noch bemerken, dass für den Fall $L = 0$, also bei Uhren, die zusammen stehen, beide Beobachter darüber einig sein werden, dass die Uhren die gleiche Zeit anzeigen. Es ist ein Abstand sowie eine Relativbewegung zwischen zwei Uhren notwendig, damit man eine Uneinigkeit über deren Synchronisation erhält.

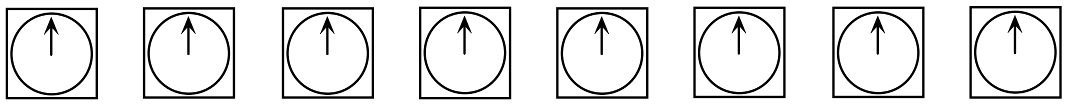
7 Die Lorentztransformationen

Wir haben bereits gesehen, dass die Newton'sche Mechanik invariant (unveränderlich) bleibt, wenn man die Galilei–Transformationen auf die Gesetze anwendet, wobei zwei Inertialsysteme miteinander verknüpft werden, die sich mit der konstanten Geschwindigkeit v entlang der x–Achse relativ zueinander bewegen:

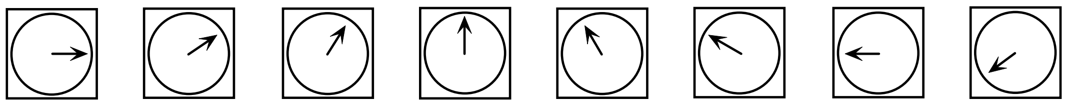
$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

Diese Transformationen setzen jedoch voraus, dass die *Zeit* ein wohldefiniertes universelles Konzept ist, das heißt, überall herrscht die gleiche Zeit und alle Beobachter stimmen darin überein, welche Zeit sie haben. Wenn wir aber einmal das grundlegende Postulat der speziellen Relativitätstheorie akzeptiert haben, dass alle physikalischen Gesetze, einschließlich der Maxwell–Gleichungen, in allen Inertialsystemen die gleiche Form haben, und aus diesem Grunde die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen den gleichen Wert haben muss, folgt daraus, wie wir gesehen haben, dass Beobachter in verschiedenen Bezugssystemen nicht mehr darüber übereinstimmen, ob Uhren an zwei verschiedenen Standorten synchronisiert sind. Darüber hinaus sind bewegte Objekte in ihrer Bewegungsrichtung lorentzkontrahiert, wie wir oben diskutiert haben. Offensichtlich sind die obigen Transformationsgleichungen zu naiv. Wir müssen genauer über die Zeit- und Längenmessung nachdenken, und wir müssen neue Transformationsgleichungen konstruieren, die mit der speziellen Relativitätstheorie in Einklang sind.
Unser Ziel besteht nun darin, einen Satz von Gleichungen zu finden, die analog zu den obigen Gleichungen die Koordinaten (x', y', z', t) eines Ereignisses in einem System S′ angeben, das sich mit der Geschwindigkeit v entlang der x–Achse relativ zu dem System S bewegt, wobei die Koordinaten im System S′ als Funktionen der Koordinaten (x, y, z, t) desselben Ereignisses im System S angegeben werden. Beobachter O im Ursprung des Systems S und O′ im Ursprung von S′ synchronisieren ihre Uhren zu $t = t' = 0$ in dem Moment, wo sie aneinander vorbeifliegen, das heißt in dem Moment, wo die beiden Koor-

dinatensysteme übereinstimmen. (Gemäß unserer bisherigen Namensgebung heißt O Jack und O′ Jill.)
Um die Zeit t' festzulegen, zu der die Bombe in ihrem System explodiert ist, könnte O′ den Abstand des Punktes (x', y', z') von ihrem Standort (dem Ursprung) messen und daraus berechnen, wie lange das Licht von dem Explosionsort ausgehend benötigt, um sie zu erreichen. Eine direktere Methode (die hilfreich ist bei der Überlegung, wie man die Koordinaten zwischen verschiedenen Systemen transformieren kann) bestände darin, sich vorzustellen, dass O′ einige Helfer hat, die jeder mit einer Uhr ausgestattet sind, die zuvor alle synchronisiert wurden (mit Blitzen aus ihrer Mitte, wie oben beschrieben). In diesem Falle wäre das Ereignis der Bombenexplosion nahe an einer dieser Uhren gelegen, und diese vor Ort befindliche Uhr würde dann den Zeitpunkt t' der Explosion direkt ablesbar machen. Man brauchte sich dann keine Gedanken über die Laufzeiten von Lichtstrahlen machen.
Im System S′ hätten dann O′ und ihre Mannschaft Uhren entlang der x–Achse aufgestellt (und überall sonst auch), die alle synchronisiert sind:



Nun überlegen wir uns, wie diese Uhrenkette aus der Sicht von O im System S aussieht. Zunächst werden sie die Zeit langsamer messen als die baugleichen Uhren im System von O, da sie sich mit der Geschwindigkeit v bewegen, und zwar um den üblichen Zeitdilatationsfaktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Außerdem werden sie nicht synchron sein. Nach dem Uhren–auf–dem–Zug–Argument aus dem obigen Kapitel, werden benachbarte Uhren, die im System S′ gemessen einen Abstand von L haben, aus der Sicht des Systems S von links nach rechts (also der Bewegungsrichtung) gesehen um den Betrag $\frac{Lv}{c^2}$ nachgehen.



Es sollte erwähnt werden, dass diese fehlende Synchronisation aus der Sicht eines anderen Systems nur in Erscheinung tritt, falls die Uhren einen Abstand in Bewegungsrichtung gemessen haben. Stellen wir uns zwei Uhren vor, die nur entlang der z′–Achse des Systems S′ gemessen einen Abstand haben. Wenn sie in S′ synchronisiert werden, indem man einen Lichtblitz in ihrer Mitte zündet, ist es klar, dass das Licht aus der Sicht des Systems S ebenfalls die gleiche Strecke zu den beiden Uhren zurückzulegen hat, also sind die Uhren in S auch synchronisiert (obwohl sie wegen des Zeitdilatationsfaktors später gestartet werden).

7.1 Herleitung der Lorentztransformationen

Wir nehmen nun an, dass O′ und ihre Mannschaft eine kleine Bombe in S′ explodieren sehen bei $(x', 0, 0, t')$. In diesem Abschnitt werden wir die Raum- und Zeitkoordinaten (x, y, z, t) desselben Ereignisses aus Sicht des Beobachters O im System S berechnen. (Wie bisher bewegt sich S′ relativ zu S mit der Geschwindigkeit v entlang der x–Achse). Mit anderen Worten: wir werden die Lorentz–Transformationen herleiten, die die Koordinaten eines Ereignisses in dem einen Inertialsystem mit Hilfe der Koordinaten des anderen Inertialsystems angeben. Wir setzen y' und z' gleich Null, weil sie sich trivial transformieren — da es keine Lorentzkontraktion senkrecht zur Bewegungsrichtung gibt, gilt $y = y'$ und $z = z'$.

Zunächst überlegen wir, zu welcher Zeit gemessen von O die Bombe explodiert. Die Mannschaft von O′ sah die Bombe zur Zeit t′ explodieren, gemessen von einer lokalen Uhr, d. h. von einer Uhr am Ort der Explosion, x′. Aus der Sicht von O ist diese Uhr nicht synchronisiert mit einer Uhr im Ursprung von S′. Wenn die Bombe explodiert und die Uhr in x′ die Zeit t′ anzeigt, wird O sehen, dass die Uhr von O′ in dessen Ursprung $t' + \frac{vx'}{c^2}$ anzeigt. Was zeigt die Uhr von O zu diesem Zeitpunkt? — Wir erinnern uns, dass O und O′ ihre Uhren im Ursprung synchronisierten, als diese zusammen waren, also zum Zeitpunkt $t = t' = 0$. Von da an hat O beobachtet, dass die Uhren von O′ um den Zeitdilatationsfaktor nachgehen. Aus diesem Grund wird O, wenn er zum Zeitpunkt der Explosion sieht, dass die Ursprungsuhr von O′ $t' + \frac{vx'}{c^2}$ anzeigt, sehen, dass die Zeit t in seinem System die gleiche ist, wobei noch die Zeitdilatation berücksichtigt werden muss, also

$$t = \frac{t' + \dfrac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Das ist die erste Lorentztransformation.

Die zweite Frage lautet: wo sieht O die Explosion stattfinden?
Da die Explosion zur Zeit t stattfindet, nachdem O′ an O vorbeigeflogen ist, befindet sich O′ $v \cdot t$ Meter hinter O, gemessen nach den Maßstäben von O′. Der Beobachter O wird diese Strecke x′ zu $x = x' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ lorentzkontrahiert sehen, da sie sich in einem relativ zu ihm bewegten System befindet.
Daher sieht O die Explosion am Ort x, der gegeben ist durch den Ausdruck

$$x = vt + x = x' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Diese Gleichung kann neu geschrieben werden unter Verwendung von x′ und t′, indem man t durch die obige Lorentztransformation substituiert. Man erhält dann

$$x = \frac{x' + v \cdot t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Wir haben somit die Lorentztransformationen gefunden, die die Koordinaten (x, y, z, t) eines Ereignisses im System S mit Hilfe der Koordinaten (x', y', z', t') desselben Ereignisses aus Sicht eines Beobachters im System S′ ausdrücken:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{x' + v \cdot t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
y &= y' \\
z &= z' \\
t &= \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}$$

Wir legen Wert auf die Feststellung, dass nichts in der obigen Herleitung davon abhängt, dass die Relativgeschwindigkeit v entlang der x–Achse positiv ist. Aus diesem Grunde hat die inverse Transformation (von (x, y, z, t) nach (x', y', z', t')) dieselbe Form wie oben angegeben, wobei v durch $-v$ ersetzt werden muss.

7.2 Lichtkugeln

Wir betrachten nun das folgende Szenario: wir nehmen an, dass in dem Moment, in dem O′ an O vorbeifliegt (also in dem Moment, über den beide übereinstimmend sagen würden, dass $t' = t = 0$ ist), von O′ ein heller Lichtblitz gezündet wird, der sich nach ihrer Beobachtung kugelförmig ausbreitet. Die sich immer weiter ausdehnende Lichtkugel[1] hat ihren Mittelpunkt in O′. Zum Zeitpunkt t' wird O′ (bzw. alle ihre im System S′ befindlichen Beobachter, um präziser zu sein) eine Lichtkugel mit Radius $c \cdot t'$ sehen, d. h. sie werden sehen, dass das Licht alle Punkte (x', y', z') erreicht hat, die auf einer Oberfläche liegen, die die Gleichung

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 \cdot t'^2$$

[1] wir stellen uns vor, dass es an einem leicht nebligen Tag geschieht, so dass sie die Lichtwellen quasi nach außen wandern sehen kann

erfüllt.

Frage: In welcher Form sehen O und seine Beobachter, die über das System S verteilt sind, die Wellenfront des Lichtblitzes sich ausbreiten?
Um diese Frage zu beantworten, bemerken wir, dass die obige Gleichung, die angibt, wo sich das Licht im System S′ zu einer bestimmten Zeit t' befindet, geschrieben werden kann als

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 \cdot t'^2 = 0,$$

was man sich als eine Oberfläche im vierdimensionalen Raum beschrieben durch die Koordinaten (x', y', z', t') vorstellen kann. Während der vierdimensionale Raum die *Gesamtheit* aller denkbaren Ereignisse an einem bestimmten Ort zu einer bestimmten Zeit darstellt, beinhaltet die Oberfläche nur eine *Teilmenge* davon, nämlich die Orte, die von der Lichtwelle zu jeweils bestimmten Zeitpunkten erreicht werden. Um nun die entsprechende Oberfläche von Ereignissen in dem vierdimensionalen Raum herauszufinden, der durch die Koordinaten (x, y, z, t) beschrieben wird, ist alles, was wir tun müssen, den gestrichenen Satz von Koordinaten mit Hilfe der Lorentztransformationen in den ungestrichenen Satz von Koordinaten zu überführen:

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}$$

Wenn wir diese Werte für x′,y′,z′ und t′ in die obige Gleichung $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 \cdot t'^2 = 0$ einsetzen, erhalten wir für die entsprechende Oberfläche im ungestrichenen vierdimensionalen Raum die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - c \cdot t = 0.$$

Das bedeutet, dass der Beobachter O und seine Mitarbeiter im System S zum Zeitpunkt ebenfalls eine kugelförmige Oberfläche des ausgesandten Lichtblitzes beobachten werden, die aber für diese Beobachtergruppe ihren Mittelpunkt in O besitzt.
Wie können O′ und O, während sie sich weiter und weiter voneinander entfernen, beide Recht haben, wenn sie feststellen, dass der sich ausdehnende Lichtblitz zu jedem Zeitpunkt eine kugelförmige Oberfläche besitzt, und wenn sie beide behaupten, der Mittelpunkt dieser Lichtkugel seien sie selbst?

Stellen wir uns die Lichtfläche so vor wie O′ sie sieht — zum Zeitpunkt t′ sieht sie eine Kugel des Radius r′, insbesondere sieht sie, dass das Licht die Koordinaten +r′ und -r′ auf der x–Achse erreicht hat. Aber aus der Sicht von O erreicht die Lichtfläche die Koordinaten +r′ und -r′ nicht gleichzeitig! (Das ist wiederum die alte Geschichte der Synchronisation zweier Uhren im vorderen bzw. hinteren Ende eines Zuges.) Aus diesem Grund sieht O nicht die Kugel, die O′ sieht: Die Ankunft des Lichtes auf der Kugel des Radius r′ um den Mittelpunkt O′ zu der Zeit t′ gehört innerhalb des Systems S zu einer Abfolge verschiedener Ereignisse zu unterschiedlichen Zeitpunkten.

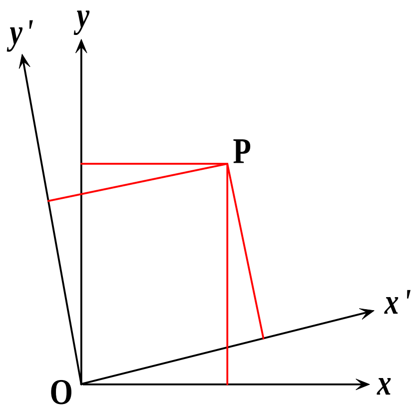
7.3 Lorentzinvarianz

Wir haben oben herausgefunden, dass bei einem Ereignis (x', y', z', t'), für das die Gleichung $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 \cdot t'^2 = 0$ gilt, die Koordinaten (x, y, z, t) die Gleichung $x^2+y^2+z^2-c^2 \cdot t^2$ erfüllen. Der Ausdruck $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ wird als *lorentzinvariant* bezeichnet, da er seinen Wert nicht verändert, wenn man von einem System in das andere wechselt.

Eine simple zweidimensionale Analogie zu dieser Invarianten erhält man, wenn man sich zwei Koordinatensysteme vorstellt, die im Ursprung übereinstimmen, wobei die x′–Achse des einen Systems gegenüber der x–Achse des anderen Systems um einen bestimmten Winkel gedreht ist. Der Punkt P hat die Koordinaten (x, y) bezüglich des einen und (x', y') bezüglich des anderen Systems. Das Quadrat des Abstandes des Punktes P vom gemeinsamen Ursprung O beträgt $x^2 + y^2$ und genauso $x'^2 + y'^2$, daher ist für die Transformation vom Koordinatenpaar (x, y) zu (x', y') der Ausdruck $x^2 + y^2$ eine Invariante. In gleicher Weise ist der Abstand zweier Punkte P_1 mit (x_1, y_1) bzw. (x_1', y_1') und P_2 mit (x_2, y_2) bzw. (x_2', y_2') in beiden Systemen gleich groß, woraus sich der Zusammenhang

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2$$

ergibt.



Das ist wirklich offensichtlich — der Abstand zwischen zwei Punkten in einer gewöhnlichen Ebene kann nicht davon abhängen, in welchem Winkel wir unsere Koordinatenachsen in diese Ebene legen.
Die „Lorentzanalogie“ hierzu kann folgendermaßen geschrieben werden, wenn man zur Vereinfachung die y- und z–Koordinaten weglässt:

$$c^2 \cdot (t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = c^2 \cdot ({t_1}' - {t_2}')^2 - ({x_1}' - {x_2}')^2 = s^2$$

Hierbei bedeutet s eine Art „Abstand“ zwischen den beiden Ereignissen (x_1, t_1) und (x_2, t_2).
Dieses s nennt man manchmal auch das „Raum–Zeit–Intervall“. *Der große Unterschied zum obigen zweidimensionalen Rotationsfall besteht darin, dass s^2 positiv oder negativ sein kann.* Im Falle, dass s^2 negativ ist, wäre der Abstand selber eine imaginäre Größe, daher handelt es sich hierbei um ein ziemlich formales Konzept! In der Praxis, wie wir weiter unten sehen werden, ist es klar, was man in jedem beliebigen Fall tun muss — die Fälle von zeitlich bzw. räumlich getrennten Ereignissen werden, zumindest für den Anfang, am besten getrennt behandelt.
Wir betrachten also zunächst zwei gleichzeitige Ereignisse im System S′, also gilt ${t_1}' = {t_2}'$. Diese beiden Ereignisse werden im System S nicht gleichzeitig sein, aber sie werden die Gleichung

$$(x_1 - x_2)^2 - c^2 \cdot (t_1 - t_2)^2 \geq 0$$

erfüllen.
Wir sagen, diese beiden Ereignisse sind räumlich getrennt bzw. *raumartig*. Das bedeutet, dass sie räumlich genügend weit voneinander entfernt sind, dass ein Lichtsignal nicht die Zeit haben könnte, um von einem Ereignis zum anderen zu gelangen, so dass das eine Ereignis als die Ursache des anderen angesehen werden könnte. Die Abfolge der beiden Ereignisse kann in unterschiedlichen Systemen umgekehrt sein, wenn die Ereignisse raumartig sind. Betrachten wir wieder einmal den Start zweier Uhren am Beginn und am Ende eines Zuges,

wie man ihn von außen beobachtet: die hintere Uhr startet zuerst. Nun betrachten wir das Ganze aus der Sicht eines noch schnelleren Zuges, der den Uhrenzug überholt — nun wird die vordere Uhr diejenige sein, die zuerst gestartet wird. Der wichtige Punkt hierbei ist, dass obwohl die Reihenfolge der Uhrenstarts in unterschiedlichen Systemen umgekehrt sein kann, keiner der beiden Uhrenstarts Ursache des jeweils anderen Starts sein kann, so dass Ursache und Wirkung hierbei nicht umgedreht werden.

Stellen wir uns nun zwei Ereignisse vor, die am selben Ort im System S′ zu unterschiedlichen Zeitpunkten stattfinden, $({x_1}', {t_1}')$ und $({x_1}', {t_2}')$. Dann gilt im System S:

$$c^2 \cdot (t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = c^2 \cdot ({t_1}' - {t_2}')^2 > 0$$

Diese Ereignisse werden als *zeitartig* bezeichnet. Es gibt kein System, in dem sie gleichzeitig stattfinden. „Ursache–Wirkung"–Ereignisse sind zeitartig.

7.4 Der Lichtkegel

Wir versuchen nun, uns die Oberfläche in einem vierdimensionalen Raum vorzustellen, die durch die von einem einzigen Lichtblitz ausgesandte Lichtwelle beschrieben wird, mathematisch:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 \cdot t^2 = 0$$

Es ist hilfreich, wenn man sich eine einfachere Situation vorstellt, und zwar die Kreiswelle, die sich auf einer ruhigen Wasseroberfläche ausbreitet, wenn man einen Kieslstein hineingeworfen hat. Wenn man mit c nun die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wasserwelle bezeichnet, ist es einfach zu erkennen, dass die Wellenfront zum Zeitpunkt t nach dem Auftreffen des Steins durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 - c \cdot t = 0$$

beschrieben wird.
Nun stellen wir uns das Ganze als eine Oberfläche im dreidimensionalen Raum (x, y, t) vor. Die Ebene, die der Zeit t entspricht, schneidet diese Oberfläche in einem Kreis mit Radius $c \cdot t$. Das bedeutet, dass die Oberfläche einem Kegel entspricht, der seine Spitze im Koordinatenursprung besitzt. Die entsprechende Oberfläche in der vierdimensionalen Raumzeit ist nicht so einfach zu veranschaulichen, ist aber ganz klar das höherdimensionale Analogon:
die ebene Oberfläche, die der Zeit t entspricht, schneidet die vierdimensionale Oberfläche in einer Kugel anstelle eines Kreises. Diese Oberfläche nennt man daher auch den *Lichtkegel*.

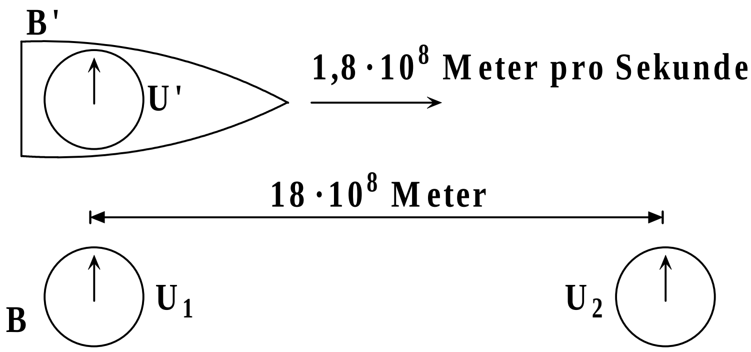
Wir haben weiter oben erwähnt, dass der Abstand eines Punktes P (x, y, z, t) vom Ursprung raumartig ist, wenn $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 \cdot t^2 > 0$ gilt, und dass er zeitartig ist, wenn $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 \cdot t^2 < 0$ gilt. Man sagt er ist *lichtartig*, wenn $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 \cdot t^2 = 0$ ist. Punkte auf der Oberfläche des oben beschriebenen Lichtkegels sind lichtartig bezüglich des Koordinatenursprungs. Um präzise zu sein, formen die Punkte, die auf der Wellenfront des Lichtblitzes liegen, der zum Zeitpunkt $t = 0$ im Ursprung ausgesandt wurde, den vorwärtigen Lichtkegel. Da die obige Gleichung nur von t^2 abhängt, gibt es auch eine Lösung mit negativem t, den „rückwärtigen Lichtkegel“, der sich ergibt, wenn man den vorwärtigen Lichtkegel an der Ebene $t = 0$ reflektiert.
Mögliche Kausalzusammenhänge sind wie folgt: Ein Ereignis im Ursprung $(0, 0, 0, 0)$ könnte ein Ereignis im vorwärtigen Lichtkegel verursachen, daher ist dies die „Zukunft“ aus der Sicht des Ursprungs. Ereignisse im rückwärtigen Lichtkegel — die „Vergangenheit“ — könnten ein Ereignis im Ursprung verursachen. Es kann keine kausale Verbindung zwischen einem Ereignis im Ursprung und einem Ereignis außerhalb des Lichtkegels geben, da die Trennung raumartig ist: Außerhalb der Lichtkegel ist aus der Sicht des Urspungs „anderswo“ .

8 Zeitdilatation: Ein ausgearbeitetes Beispiel

„Bewegte Uhren gehen langsam" *plus* „Bewegte Uhren verlieren ihre Synchronisation" *plus* „Längenkontraktion" führt zu Konsistenz!

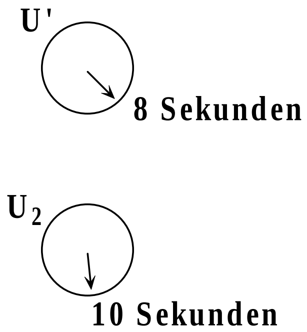
In diesem Text soll gezeigt werden, wie es möglich ist, dass zwei Beobachter, die sich in zwei verschiedenen gegeneinander mit relativistischer Geschwindigkeit bewegenden Bezugssystemen befinden, die Uhr des jeweils anderen langsamer gehen und nicht die gleiche Zeit anzeigen sehen, sich auf der anderen Seite jedoch darüber einig sind, welche Zeit eine Uhr anzeigt, die sich außerhalb der beiden bewegten Bezugssysteme befindet!

Nehmen Sie an, dass wir im Bezugssystem S zwei synchronisierte Uhren U_1 und U_2 haben, die $18 \cdot 10^8$ Meter Abstand voneinander haben (das sind 1,8 Millionen Kilometer oder 6 Lichtsekunden). Ein Raumschiff, das eine Uhr U' mit sich führt, fliegt mit 60% der Lichtgeschwindigkeit, das sind 180000 km pro Sekunde, parallel zur Geraden $\mathrm{U}_1\mathrm{U}_2$, wobei es die beiden Uhren in kleinem Abstand passiert.



Nehmen Sie weiter an, die Uhr U' wird mit der Uhr U_1 in dem Moment synchronisiert, in dem sie aneinander vorbeifliegen, so dass sie beide auf Null stehen.

Ein äußerer Beobachter B im Bezugssystem S — das uns hier einmal als „äußerer“ Bezugsrahmen dienen soll — misst, dass das Raumschiff 10 Sekunden benötigt, um die Uhr U_2 zu erreichen, da die Distanz 6 Lichtsekunden beträgt und das Raumschiff eine Geschwindigkeit von $0,6 \cdot c$ hat.
Was zeigt die Uhr an Bord des Schiffes, wenn es die Uhr U_2 erreicht? — Der Faktor, der die Zeitdilatation angibt, beträgt $\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) = \frac{4}{5}$, also wird U', die Schiffsuhr, 8 Sekunden anzeigen.



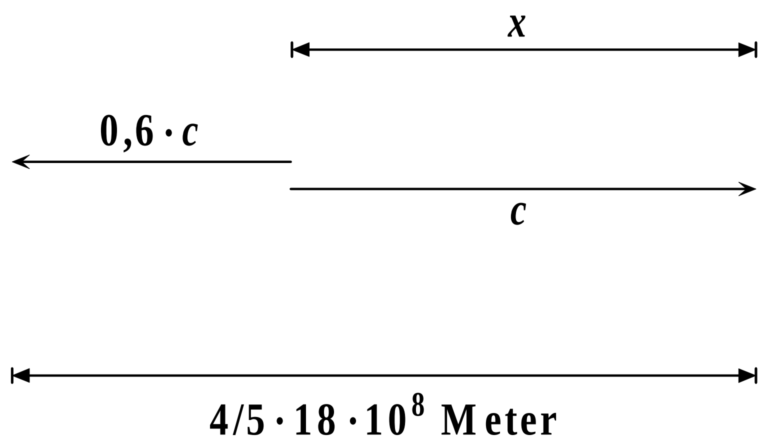
Daher werden sowohl B als auch B', wenn sie sich bei U_2 befinden, wenn die Schiffsuhr U' an U_2 vorbeifliegt, darin übereinstimmen, dass die beiden Uhren wie nebenstehend aussehen.
Wie um alles in der Welt kann dann B' feststellen, dass die Uhren U_1 und U_2 diejenigen sind, die nachgehen?

Für B' gehen die Uhren U_1 und U_2 nach, aber erinnern Sie sich, dass sie *nicht synchronisiert sind*. Für B' liegt die Uhr U_1 gegenüber U_2 um $\frac{Lv}{c^2} = \frac{L}{c} \cdot \frac{v}{c} = 6 \cdot 0.6 = 3.6$ Sekunden zurück.
Daher wird B' den Schluss ziehen, dass in dem Moment, wo U_2 an U_1 vorbeifliegt U_1 6,4 Sekunden anzeigen muss, weil U_2 10 Sekunden anzeigt. Die Uhr, die zum Beobachter B' gehört, wird in dem Moment 8 Sekunden anzeigen, *daher wird B' folgern, dass U_1 um den korrekten Zeitdilatationsfaktor von $\frac{4}{5}$ nachgeht*.
So gelingt es, dass der Wechsel in der Gleichzeitigkeit es den beiden Beobachtern ermöglicht, die Uhr des jeweils anderen nachgehen zu sehen.
Natürlich ist es nicht ganz einfach zu überprüfen, ob B' mit seiner Annahme Recht hat, dass in dem Moment, wo er die zweite „Außenuhr“ U_2 passiert, die Uhr U_1 6,4 Sekunden anzeigt. Schließlich ist die erste Uhr nun 1,8 Millionen Kilometer entfernt!
Lassen Sie uns dennoch annehmen, dass beide Beobachter mit Hubble-ähnlichen Teleskopen ausgestattet sind, die beide an schnell agierende Kameras angeschlossen sind, so dass es keine Kunst ist, eine 1,8 Millionen Kilometer entfernte Uhr abzulesen.
Um ihren Streit zu beenden, verständigen sich die beiden darauf, dass wenn B' die zweite Uhr erreicht, der außenstehende Beobachter ebenfalls dort stationiert sein wird und dass beide in dem Moment, wo B' vorbeifliegt, einen digitalen Schnappschuss von der weit entfernten Uhr U_1 machen werden, um zu sehen, was sie anzeigt.
B weiß natürlich, dass U_1 6 Lichtsekunden entfernt liegt, und dass U_1 mit U_2 synchronisiert ist, die in dem Moment des Vorbeiflugs 10 Sekunden anzeigt, also muss sein Schnappschuss von U_1 4 Sekunden anzeigen. Das heißt, wenn

er die 6 Lichtsekunden entfernte Uhr betrachtet, sieht es für ihn so aus, als wäre es 6 Sekunden früher.
Was zeigt das Digitalfoto, das B' angefertigt hat? — Es muss ein identisches Bild zeigen, denn zwei Fotos, die zur selben Zeit vom selben Ort gemacht wurden, *müssen* dasselbe zeigen! Also muss B' ebenfalls ein Foto erhalten, auf dem die Uhr U_1 4 Sekunden anzeigt.
Wie kann B' diese Tatsache mit seiner Annahme in Einklang bringen, dass die Uhr U_1 in dem Moment, in dem die Kamera ausgelöst wurde, eine Zeit von 6,4 Sekunden anzeigt?
Die Antwort ist, dass es eine Möglichkeit gibt, wenn B' etwas Ahnung von Relativitätstheorie hat!

1. **Längenkontraktion**
   Für B' ist die Uhr U_1 tatsächlich nur $\frac{4}{5} \cdot 18 \cdot 10^8$ Meter entfernt (B' sieht die Strecke $\overline{\mathrm{U}_1\mathrm{U}_2}$ lorentz–kontrahiert!).

2. **Das Licht musste noch nicht einmal diese Strecke zurücklegen!**
   In dem Bezugssystem von B' bewegt sich die Uhr U_1 vom Beobachter weg, daher muss das Licht, das B' im Punkt U_2 erreicht, U_1 verlassen haben als die Uhr noch näher war — in der Entfernung x in der unten folgenden Skizze. Diese zeigt das Licht im Bezugssystem von B', wie es sich mit Lichtgeschwindigkeit c auf sie zu bewegt, während sich die Uhr U_1 gleichzeitig mit $0,6 \cdot c$ von ihr fort (in der Skizze nach links) bewegt. Daher ist das Bild, das sie von U_1 sieht, während sie an U_2 vorbeifliegt, in dem Moment erzeugt worden, als B' in seinem Bezugssystem eine Entfernung von x von U_1 hatte, wobei $x \cdot (1 + \frac{3}{5}) = \frac{4}{5} \cdot 18 \cdot 10^8$ m gilt, woraus $x = 9 \cdot 10^8$ m folgt.
   Nachdem sich B' klar gemacht hat, dass das Bild, das er von U_1 geschossen hat, die Uhr verlassen hat, als sie nur $9 \cdot 10^8$ Meter entfernt war, das heißt also 3 Lichtsekunden, folgert er, dass er U_1 beobachtet, als wäre es 3 Sekunden früher.



3. **Zeitdilatation**
   Die Geschichte hört sich bisher so an:
   B' hat ein Digitalfoto der ersten Uhr, das 4 Sekunden anzeigt. B' weiß, dass das Licht 3 Sekunden benötigt hat, um ihn zu erreichen. Was folgert er daraus, das die Uhr in Wirklichkeit in dem Moment angezeigt hat, als er die zweite Uhr passierte? Wenn Sie nun in Versuchung sind, 7 Sekunden als Antwort zu geben, haben Sie vergessen, dass sich im Bezugssystem von B' die Uhr U_1 mit einer Geschwindigkeit von $0,6 \cdot c$ bewegt und daher um einen Faktor von $\frac{4}{5}$ langsamer geht.
   Wenn B' diesen Faktor korrekt in die gesamte Interpretation des Vorganges integriert, folgert er, dass die Uhr in den drei Sekunden, die das Licht benötigte, um ihn zu erreichen, selber um $\frac{4}{5}$ mal 3 Sekunden, also 2,4 Sekunden weitergelaufen ist.
   Insgesamt ergibt sich also, dass die Uhr auf dem Foto 4 Sekunden anzeigt, der Beobachter weiß, dass die Uhr 2,4 Sekunden weitergelaufen sein muss, so dass die Uhr im Moment der Anfertigung der Aufnahme 6,4 Sekunden angezeigt haben muss, was genau mit der obigen Annahme des Beobachters B' übereinstimmt!

Der Hauptpunkt dieser Ausführungen ist, dass es zunächst unmöglich erscheint, dass zwei relativ zueinander bewegte Beobachter beide meinen können, die Uhr des anderen gehe nach. Bezieht man aber alle anderen Konsequenzen der Relativitätstheorie mit in die Überlegungen ein, nämlich die Längenkontraktion sowie die Relativität der Gleichzeitigkeit, die alle letztendlich aus der Annahme der konstanten Lichtgeschwindigkeit folgen, ergibt sich ein vollkommen konsistentes Bild. Es gibt also keine logischen Widersprüche, es sei denn, man lässt irgendeinen Aspekt der Relativitätstheorie außer Acht!

9 Mehr Relativität: Der Zug und die Zwillinge

9.1 Einsteins Definition vom gesunden Menschenverstand

Wie wir aus den bisherigen Erörterungen gelernt haben, hat die erfreuliche Tatsache, dass Einsteins Spezielle Relativitätstheorie das durch das Michelson–Morley–Experiment aufgeworfene Problem — die Nichtexistenz des Äthers — gelöst hat, dennoch ihren Preis. Die einfache Annahme, dass sich das Licht in jedem beliebigen Inertialsystem mit der Geschwindigkeit c ausbreitet, führt zu Konsequenzen, die dem gesunden Menschenverstand widersprechen. Als diese Aussage Einstein gegenüber vehement vertreten wurde, lautete seine Antwort: „Der gesunde Menschenverstand, das sind alle die Vorurteile, die man sich angeeignet hat, bevor man achtzehn wurde.“ Unsere gesamte Intuition über Raum, Zeit und Bewegung beruht auf unseren Kindheitserfahrungen mit einer Welt, in der sich keine materiellen Objekte mit Geschwindigkeiten bewegen, die der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar wären. Wenn wir in einer Zivilisation groß geworden wären, in denen man mit Raumschiffen durch das Universum reist, die sich mit relativistischen Geschwindigkeiten bewegen, würden Einsteins Annahmen über Raum und Zeit wahrscheinlich dem gesunden Menschenverstand entsprechen. Aus wissenschaftlicher Sicht besteht die wahre Frage nicht darin, ob die Spezielle Relativitätstheorie dem gesunden Menschenverstand widerspricht, sondern ob ihre Aussaagen zu einem *logischen Widerspruch* geführt werden können. Wenn dem so wäre, würde der gesunde Menschenverstand gewinnen. Seit die Theorie veröffentlicht wurde, hat es immer wieder Leute gegeben, die (auch in wissenschaftlichen Artikeln) behaupteten, die Theorie *würde* zu Widersprüchen führen. Das vorhergehende Kapitel, das ausgarbeitete Beispiel zur Zeitdilatation, hat gezeigt, wie die eingehende Untersuchung eines scheinbaren Widerspruches schließlich zu der Schlussfolgerung führt, dass kein logischer Widerspruch vorhanden war. In diesem Kapitel werden wir weitere ins Auge fallende Widersprüche aufs Korn nehmen und darüber nachdenken, wie man sie auflösen kann. Das ist die beste Art und Weise, sich ein Verständnis der Relativität zu erarbeiten.

9.2 Einsperren eines Zuges in einem Tunnel

Eines der ersten Paradoxa, die gelöst werden mussten, basierte auf der Lorentzkontraktion. Wir erinnern uns daran, dass jedes Objekt, das sich relativ zu einem Beobachter bewegt, zusammengeschrumpft erscheint, in Bewegungsrichtung um den allgegenwärtigen Faktor $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ verkürzt. Einstein lebte damals in der Schweiz, einem Land, in dem die Eisenbahnen viele Tunnel durch die Alpen durchfahren mussten.
Nehmen wir einmal an, ein Zug der Länge L bewegt sich entlang einer geraden Strecke mit relativistischer Geschwindigkeit und fährt in einen Tunnel ein, der ebenfalls die Länge L besitzt. Der Berg oberhalb des Tunnels wird von Banditen bewohnt. Diese beobachten einen Zug der Länge $L \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, daher warten sie, bis dieser kurze Zug komplett innerhalb des Tunnels der Länge L ist, dann schließen sie jeweils eine Tür an beiden Enden des Tunnels, und der Zug ist nun komplett innerhalb des Berges eingeschlossen. Nun sehen wir uns dasselbe Szenario aus der Sicht eines Beobachters innerhalb des Zuges an. Dieser sieht einen Zug der Länge l, der sich einem Tunnel der Länge $L \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ nähert, also ist der Tunnel aus dieser Perspektive kürzer als der Zug! Was denkt der Bahnreisende, was geschieht, wenn die Banditen die beiden Türen schließen?

9.3 Die Tunneltüren werden gleichzeitig geschlossen

Der Schlüssel zum Verständnis dieses scheinbaren Paradoxons liegt darin, dass wir gesagt haben, dass die Banditen die beiden Türen *gleichzeitig* schließen. Wie können sie das hinbekommen, wo doch die Türen weit auseinander gelegen sind? Sie könnten Walkie–Talkies benutzen, die Radiowellen aussenden, oder einfach einen Lichtstrahl längs des Tunnels schicken, da er keine Biegung hat. Wir dürfen dabei nicht aus den Augen verlieren, dass sich der Zug ebenfalls annähernd mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, daher müssen die Banditen sehr mit dem Timing aufpassen! Die einfachste Art und Weise, das Schließen der beiden Türen zu synchronisieren, besteht darin, zunächst einmal anzunehmen, dass die Banditen den Fahrplan des Zuges genau kennen, und zu einer geeigneten, vorher genau berechneten Zeit, von der Mitte des Tunnels aus einen Lichtpuls in beide Richtungen zu senden, der die beiden Tunneltüren dann gleichzeitig schließt, vorausgesetzt, die Lichtquelle war genau in der Mitte positioniert.

9.4 Oder sind sie es etwa doch?

Wir betrachten nun das beschriebene Türschließen aus der Sicht des Bahnreisenden. Wir nehmen an, dass er sich in einem Panoramawagen befindet, dass er unglaublich gute Augen hat, und dass ein bisschen Nebel herrscht, so dass er die beiden Lichtpulse sehen kann, die zu den beiden Tunnelenden unterwegs sind. Natürlich ist der Zug ein *perfektes Inertialsystem*, daher sieht er die beiden Lichtpulse sich zwar in entgegengesetzter Richtung, aber beide mit der Geschwindigkeit c relativ zum Zug fortbewegen. Gleichzeitig sieht er, wie sich der Tunnel mit großer Geschwindigkeit relativ zum Zug bewegt. Wir regeln im folgenden unseren Sprachgebrauch so, dass der Zug durch die „vordere“ Tür in den Tunnel einfährt. Der Beobachter sieht die Tür am anderen Ende des Tunnels, also die „hintere“ Tür, auf sich und ebenfalls auf den Lichtpuls zurauschen. Wenn er in dem Tunnel ist, wird sich die vordere Tür gleichermaßen von ihm wegbewegen, und aus demselben Grunde hat der Lichtstrahl, der sich auf die vordere Tür zubewegt, eine größere Reise zu unternehmen. Die beiden Lichtpulse können daher aus Sicht des Zugreisenden die beiden Tunneltüren nicht gleichzeitig erreichen.
Das Konzept der Gleichzeitigkeit, und damit die Idee, dass bestimmte Ereignisse zum selben Zeitpunkt stattfinden, ist nicht *invariant*[1]*, wenn wir das Inertialsystem wechseln*. Der Mann im Zug sieht die Hintertür sich zuerst schließen, und wenn sie nicht schnell wieder geöffnet wird, wird die Vorderseite des Zuges in sie hineinstoßen, bevor die Vordertür hinter dem Zug geschlossen wird.

9.5 Funktioniert die Lorentzkontraktion seitwärts?

Die obige Diskussion basiert auf Einsteins Vorhersage, dass Objekte, die sich mit relativistischer Geschwindigkeit bewegen, in der Bewegungsrichtung zusammengeschrumpft erscheinen. Woher wissen wir, dass sie nicht in allen drei Dimensionen geschrumpft sind, dass sie also nicht ihre Form behalten und nur insgesamt kleiner werden? Die Begründung liegt, wiederum nach Einstein, in einem Symmetrieargument.
Nehmen wir einmal an, zwei Züge fahren mit gleich großer, relativistischer und entgegengesetzt gerichteter Geschwindigkeit auf parallel verlaufenden Gleisen in nördlicher bzw. südlicher Richtung aneinander vorbei. Nun denken wir uns auf jedem dieser Züge zwei gleich große Passagiere, die leicht vornüber gebeugt aus dem Zugfenster schauen, so dass ihre Nasen leicht aneinander reiben, wenn die beiden Züge einander passieren.
Falls nun N (der Richtung Norden fahrende Passagier) den Reisenden S in al-

[1] unveränderlich

len drei Dimensionen, d. h. also auch von der Körpergröße her, als geschrumpft wahrnimmt, dann würde die Nase von N an der Stirn von S vorbeischrammen, ebenso würde N spüren, wie die Nase von S an seinem Kinn schrammt. Aus diesem Grunde würde N nach der Begegnung eine demolierte Nase und ein beschädigtes Kinn haben, S dagegen eine blutige Nase und eine verletzte Stirn. Da dies aber ein perfekt symmetrisches Problem ist, würde S beobachten, dass N die verletzte Stirn hat usw.
Am nächsten Bahnhof könnten die beiden aussteigen und ihre Verletzungen kontrollieren. Diese müssen natürlich symmetrisch sein! Die einzige konsistente Lösung besteht in der Annahme, dass keiner der beiden den anderen als in der Höhe (d. h. in der Richtung senkrecht zur relativen Bewegung) geschrumpft wahrnimmt, so dass sich ihre beiden Nasen gegenseitig berühren. Aus diesem Grund wirkt die Lorentzkontraktion nur in der Bewegungsrichtung. Objekte erscheinen gestaucht, aber nicht geschrumpft.

9.6 Wie kann man Zwillingen verschiedene Geburtstage verschaffen?

Vielleicht das berühmteste aller Paradoxa der speziellen Relativitätstheorie, das in den fünfziger Jahren immer noch heiß in den Zeitschriften diskutiert wurde, ist das sogenannte *Zwillingsparadoxon*. Das Szenario sieht folgendermaßen aus:
Einer von zwei Zwillingen — die Schwester — ist ein Astronaut. (Entgegen der Tradition nehmen wir zweieiige an Stelle von eineiigen Zwillingen, so dass wir die Personalpronomen „er“ und „sie“ verwenden können, um zu verdeutlichen, wen wir meinen.) Sie startet in einem relativistischen Raumschiff Richtung Alpha Centauri, vier Lichtjahre entfernt, mit einer Geschwindigkeit von sagen wir 0,6 c. Wenn sie dort ankommt, wendet sie ohne Aufenthalt und fliegt zurück. Aus der Sicht ihres Bruders, der auf der Erde zurückgeblieben ist, gingen ihre Uhren um den Faktor $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ nach, daher vergingen für sie auf dem Hin- und Rückflug, obwohl sie aus der Perspektive des Bruders $\frac{8}{0{,}6}$ Jahre bzw. 160 Monate benötigte, insgesamt nur $\frac{4}{5}$ davon, d. h. 128 Monate. Wenn sie also auf die Erde zurückkehrt und aus dem Raumschiff aussteigt, ist sie 32 Monate jünger als ihr Bruder.
Doch einen Moment — wie sieht das Ganze aus *ihrer* Perspektive aus? Sie sieht die Erde sich mit 0,6 c bewegen, erst von ihr weg und dann wieder auf sie zu. Daher muss sie die Uhr ihres Bruders langsamer gehen sehen! Ist es dann nicht so, dass sie erwarten muss, dass ihr Bruder bei ihrer Rückkehr der Jüngere sein wird?
Der Schlüssel zur Lösung dieses Paradoxons liegt darin, dass diese Situation nicht so symmetrisch ist, wie sie aussieht. Die beiden Zwillinge machen

ziemlich unterschiedliche Erfahrungen. Der Zwilling auf dem Raumschiff befindet sich während der anfänglichen Beschleunigungsphase *und* den Zeiten der Umkehr und der Abbremsung in *keinem* Inertialsystem. (Um eine Vorstellung von den involvierten Geschwindigkeiten zu bekommen: Das Erreichen der Geschwindigkeit 0,6 c dauert bei einer Beschleunigung, wie sie ein frei fallender Stein hat, über ein halbes Jahr.) Unsere obige Analyse, wie die Uhren in einem Inertialsystem aus der Sicht eines anderen Inertialsystems aussehen, stimmt in den Zeiten, wo eines der Systeme kein Inertialsystem ist, nicht mit der Realität überein, also auch dann nicht, wenn eines der Systeme beschleunigt ist.

9.7 Die Zwillinge bleiben in Kontakt

Um zu versuchen zu verstehen, wie sich der Unterschied im Alter der beiden Zwillinge entwickeln könnte, stellen wir uns einmal vor, die Zwillinge bleiben während des Fluges miteinander in Kontakt. Jeder Zwilling erzeugt einmal pro Monat (gemäß seinem Kalender und seinen Uhren) einen hellen Lichtblitz, so dass jeder der beiden beobachten kann, wie schnell der andere altert. *Die zu beantwortenden Fragen lauten:*

- Wenn der Bruder auf der Erde das Licht einmal im Monat anmacht, in welchen Abständen sieht die Schwester gemäß ihrer Uhr das Licht leuchten, während sie sich von der Erde mit der Geschwindigkeit 0,6 c entfernt?
- In welchen Abständen sieht sie es leuchten, während sie mit der Geschwindigkeit 0,6 c zurückkehrt?
- Wie oft sieht der Bruder die Lichtblitze vom Raumschiff?

Wenn wir diese Fragen beantwortet haben, ist es nur noch eine buchhalterische Frage herauszufinden, um wie viel jeder der beiden Zwillinge gealtert ist.

9.8 Berechnung der beobachteten Zeit zwischen zwei Blitzen

Um herauszufinden, in welchen Abständen die Zwillinge die jeweiligen Lichtblitze beobachten, werden wir einige Ergebnisse des vorangegangenen Kapitels über die Zeitdilatation verwenden. In einiger Hinsicht war das nur eine kleiner dimensionierte Version des vorliegenden Problems. Wir erinnern uns, dass wir zwei Uhren auf dem Erdboden, in einem Abstand von 2 Millionen

Kilometern, aufgestellt hatten. Als die Astronautin mit bequemen 0,6 c die erste Uhr passierte, zeigten sowohl diese Uhr als auch die Borduhr auf Null. Als sie an der zweiten bodenstationierten Uhr vorbeiflog, stand ihre Borduhr auf 8 Sekunden, und die erste Bodenuhr, die sie in dem Moment fotografierte, zeigte 4 Sekunden an.

Das heißt, dass nachdem auf ihrer Uhr 8 Sekunden vergangen waren, eine kontinuierliche *Beobachtung* der ersten Bodenuhr ergeben würde, dass diese nur 4 Sekunden gemessen hat. (Dieser Effekt setzt sich aus der Zeitdilatation zusammen und aus der Tatsache, dass das Licht von der Uhr immer länger benötigt, um sie zu erreichen, je mehr sie sich von der Uhr entfernt.)

Unser Zwillingsproblem ist die gleiche Situation, bei derselben Geschwindigkeit, aber über einen längeren Zeitraum betrachtet — wir schließen daraus, dass die Beobachtung einer beliebigen irdischen Uhr von dem sich entfernenden Raumschiff aus betrachtet ergeben wird, dass diese *halb so schnell* tickt, daher werden die Lichtblitze des Bruders aus der Sicht des Raumschiffs alle zwei Monate eintreffen.

Symmetrisch hierzu wird der Bruder, solange er das Raumschiff seiner Schwester sich mit 0,6 c entfernen sieht, deren Lichtblitze ebenfalls nur alle zwei Monate zu Gesicht bekommen.

Um die Frequenz der Lichtblitze ihres Bruders bei ihrer Rückreise zu bestimmen, müssen wir zu unserem vorigen Beispiel zurückkehren und herausfinden, wie die Astronautin, die sich mit 0,6 c bewegt, die zweite bodenstationierte Uhr ticken sieht, diejenige, auf die sie sich zubewegt.

Wir wissen, dass in dem Moment, wo sie an der zweiten Uhr vorbeifliegt, dort 10 Sekunden angezeigt werden, und ihre eigene Uhr 8 Sekunden anzeigt. Um herauszufinden, wie viel Zeit auf der zweiten Uhr vergangen ist, seit sie die erste Uhr passiert hat, müssen wir berechnen, welche Zeit sie auf der zweiten Uhr in dem Moment beobachtet hätte (z. B. mit einem Fernrohr), als sie gleichauf mit der ersten Uhr war, ein Zeitpunkt, wo sowohl die Borduhr als auch die erste Bodenuhr Null angezeigt haben. In diesem Moment würde sie auf der zweiten Bodenuhr aber auch dasselbe sehen wie ein auf dem Boden stationierter Beobachter, der die zweite Uhr von der ersten Uhr aus mit einem Fernrohr beobachtet. Da der Beobachter auf dem Erdboden weiß, dass die beiden Bodenuhren synchronisiert sind, und da die erste Bodenuhr Null anzeigt und die zweite Bodenuhr sechs Lichtsekunden entfernt steht, muss sie -6 Sekunden anzeigen, wenn man sie in dem Moment von ferne, d. h. von der ersten Uhr aus, beobachtet.

Daher wird die Astronautin die zweite Bodenuhr von -6 bis $+10$ Sekunden vorrücken sehen, während ihre eigene Uhr von 0 bis 8 Sekunden läuft. Mit anderen Worten, sie sieht die Uhr, auf die sie sich mit 0,6 c zubewegt, doppelt so schnell gehen wie ihre eigene.

Kehren wir zum Schluss wieder zu den Zwillingen zurück. Während ihrer Rückreise wird die Schwester die Lampe ihres Bruders zweimal pro Monat

blitzen sehen. (Offensichtlich kompensiert der Zeitdilatationseffekt die Tatsache nicht vollständig, dass jeder nachfolgende Blitz weniger Strecke bis zu ihr zurücklegen muss.)
Wir sind nun soweit, dass wir die Buchhaltung, zunächst aus Sicht der Schwester, durchführen können.

9.9 Was sieht sie?

Bei $0{,}6\,c$ sieht sie die Distanz zu Alpha Centauri um den bekannten Faktor $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 0.8$ verkürzt auf eine Entfernung von 3,2 Lichtjahren, für die sie bei $0{,}6\,c$ einen Zeitraum von 5,333 Jahren, oder bequemer 64 Monaten benötigt. Während der Reise von zu Hause weg wird sie daher 32 Blitze sehen, also wird sie ihren Bruder um 32 Monate altern sehen.
Ihre Rückreise wird wiederum 64 Monate benötigen, dieses Mal wird sie aber 128 Blitze sehen, und daher wird sie insgesamt $128 + 32 = 160$ Blitze sehen, das heißt ihr Bruder ist bis zu ihrer Rückkehr um 160 Monate oder 13 Jahre 4 Monate gealtert.

9.10 Was sieht er?

Während er nach den Lichtblitzen durch sein Fernrohr Ausschau hält, wird der zu Hause gebliebene Bruder seine Schwester mit der halben Rate wie sich selbst altern sehen, solange sie sich von ihm wegbewegt, dann wird er sie wiederum doppelt so schnell altern sehen, während sie zurückkehrt. Auf den ersten Blick hört sich das genauso an wie das, was sie sieht — aber es ist nicht dasselbe! Die wichtige Frage, die man sich stellen muss, ist die, *wann* er sie umkehren sieht. Aus seiner Sicht benötigt sie für die vier Lichtjahre Hinweg bei einer Geschwindigkeit von $0{,}6\,c$ eine Zeit von $\frac{4}{0{,}6}$ Jahren, oder 80 Monaten. **Aber** er *sieht* sie nicht umkehren, bevor nicht weitere vier Jahre vergangen sind, und zwar wegen der Zeit, die das Licht benötigt, um von Alpha Centauri zur Erde zurückzulegen! Mit anderen Worten: Er wird sie tatsächlich über einen Zeitraum von $80 + 48 = 128$ Monaten halb so schnell wie sich selber altern sehen, und während dieser Zeit wird er daher 64 Lichtblitze sehen.
Wenn er seine Schwester zurückkehren *sieht*, hat sie in Wirklichkeit schon mehr als die Hälfte des Rückweges hinter sich gebracht! Wie wir uns erinnern können, dauert die Reise in seinem Bezugssystem 160 Monate (8 Lichtjahre bei einer Geschwindigkeit von $0{,}6\,c$), daher wird er seine Schwester nur in den verbleibenden $160 - 128 = 32$ Monaten doppelt so schnell wie sich selber altern sehen, so dass er in dieser Zeit 64 Lichtblitze sehen wird, die sie auf dem Rückweg ausgesendet hat.
Daher wird der Bruder, indem er die Lichtblitze zählt, die sie monatlich aus-

gesendet hat, den Schluss ziehen, dass sie 128 Monate älter geworden ist, während auf seinem Kalender 160 Monate vergangen sind. Wenn sie also aus dem Raumschiff aussteigt und 32 Monate jünger als ihr Zwillingsbruder ist, werden beide nicht überrascht sein!

9.11 Der Dopplereffekt

Die oben dargestellte Analyse enthüllt die Tatsache, dass einem Reisenden, der sich einem flackernden Blitzlicht mit 60% der Lichtgeschwindigkeit nähert, die Frequenz des Lichtes verdoppelt gegenüber der eigenen Frequenz des Blitzlichtes erscheinen wird, während ein Reisender, der sich mit 0,6 c von dem Blitzlicht entfernt, nur die halbe Frequenz beobachtet.
Dies ist ein spezielles Beispiel des *Dopplereffektes*, der zuerst im Jahre 1842 von dem deutschen Physiker Christian Doppler diskutiert wurde. Für Schallwellen gibt es ebenfalls einen Dopplereffekt. Schall wird erzeugt durch ein schwingendes Objekt, das eine Abfolge von Druckimulsen durch die Luft sendet. Diese Druckwellen sind analog zu den Lichtblitzen. Wenn man sich auf die Schallquelle zu bewegt, wird man den Druckimpulsen in schnellerer Abfolge begegnen, als wenn man still steht. Das bedeutet, dass man einen höheren Ton hört. Genauso wird man einen tieferen Ton hören, wenn man sich von der Schallquelle entfernt. Dies ist der Grund, warum der Ton eines Düsenjets oder einer Sirene tiefer wird, wenn sich eine solche Schallquelle an einem vorbei bewegt. Die Einzelheiten für den akustischen Dopplereffekt sehen ein bisschen anders aus als für den optischen Dopplereffekt, weil die Schallgeschwindigkeit nicht für alle Beobachter die gleiche ist — sie beträgt 330 Meter pro Sekunde relativ zur Luft gemessen.
Eine wichtige astronomische Anwendung des Dopplereffektes liegt in der *Rotverschiebung*. Das Licht von sehr weit entfernten Galaxien ist im Vergleich zu näher befindlichen Galaxien zum roten Ende des Spektrums hin verschoben. Dies liegt daran, dass die Galaxien sich umso schneller von uns wegbewegen, je weiter sie von uns entfernt sind, weil sich das Universum ausdehnt. Das Licht der sich von uns schneller entfernenden Galaxien ist „roter“, weil rotes Licht eine niedrige Frequenz hat (blaues Licht ist im sichtbaren Spektrum das Licht mit der höchsten Frequenz), und wir sehen Licht mit erniedrigter Frequenz aus demselben Grund, weswegen der Astronaut, der sich von der Erde wegbewegt, die Lichtblitze langsamer hintereinander abfolgen sieht. Die schnellsten Galaxien, die wir übrigens beobachten können, bewegen sich sogar noch schneller von uns weg als die 0,6 c unserer Astronautin!

10 Geschwindigkeitsaddition: Ein Spaziergang im Zug

Wenn ich vom Ende zum Anfang eines Zuges mit einer Geschwindigkeit von 3 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ gehe, und der Zug sich mit 60 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ fortbewegt, dann sagt mir mein gesunder Menschenverstand, dass ich mich auf den Erdboden bezogen mit insgesamt 63 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ bewege. Wie wir gesehen haben, folgt diese offensichtliche Wahrheit, die einfache Addition der Geschwindigkeiten, aus den Galilei–Transformationen. Leider kann dies für hohe Geschwindigkeiten nicht mehr richtig sein. Wir wissen, dass bei einem Lichtstrahl, der sich im Zug vorwärts bewegt, die Geschwindigkeit bezüglich des Erdbodens gleich der Geschwindigkeit relativ zum Zug sein muss, dass es also keinen Unterschied von 60 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ zwischen diesen beiden Geschwindigkeiten geben kann. Es ist daher notwendig, eine sorgfältige Analyse einer von außen betrachteten Person anzustellen, die sich mit großer Geschwindigkeit in einem Zug vorwärts bewegt, um festzustellen, wie sich Geschwindigkeiten *wirklich* addieren.

Wir denken uns unseren Standardzug der Länge L, der sich längs der Bahnlinie mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegt, und der außerdem mit zwei synchronisierten Uhren am Zuganfang und -ende ausgestattet ist. Der Fußgänger startet am Zugende, wenn die dortige Uhr Null anzeigt. Wenn wir für den Fußgänger eine konstante Geschwindigkeit von u Metern pro Sekunde annehmen (natürlich relativ zum Zug gemessen), wird der Fußgänger auf der Uhr am Zuganfang $\frac{L}{u}$ Sekunden ablesen, wenn er dort ankommt.

Wie sieht das Geschehen von außen betrachtet aus? Wir nehmen einmal an, dass die Uhr am Zugende in dem Moment, als der Fußgänger seinen Spaziergang dort begann, gleichauf mit der ersten außenstehenden Uhr lag, und dass beide Uhren (die am Zugende und die außen montierte) Null anzeigten. Der außenstehende Beobachter sieht den Fußgänger die vordere Uhr dann erreichen, wenn diese Uhr $\frac{L}{u}$ Sekunden anzeigt (dies ist in Übereinstimmung mit dem, was man in dem Zug beobachtet — zwei gleichzeitige Ereignisse *am selben Ort* erscheinen allen Beobachtern gleichzeitig). Aber im selben Moment wird der außenstehende Beobachter aussagen, dass die *hintere* Zuguhr, wo der Fußgänger gestartet ist, $\frac{L}{u} + \frac{Lv}{c^2}$ Sekunden anzeigt. (Dies folgt aus unserem weiter oben erhaltenen Resultat, dass zwei Uhren mit Abstand L, die in einem Bezugssystem synchronisiert sind, in einem anderen Bezugssystem, das sich mit der Geschwindigkeit v längs der Verbindungslinie der beiden Uhren relativ zu dem ersten Bezugssystem bewegt, nicht mehr synchronisiert sein werden, und zwar um eine Zeitdifferenz von $\frac{Lv}{c^2}$.)

Wie viel Zeit vergeht nun für den außenstehenden Beobachter während des Spaziergangs des Fußgängers? In dem Moment, als der Gang begann, sah der Beobachter die Uhr am Zugende, die sich direkt neben ihm befand, Null anzeigen. Als der Fußgänger im Zug vorne ankam, sah der Beobachter nach dem obigen Absatz die gleiche Uhr $\frac{L}{u} + \frac{Lv}{c^2}$ anzeigen. Aber der außenstehende Beobachter würde die bewegte Uhr um den üblichen Zeitdilatationsfaktor langsamer gehen sehen — daher würde er auf seiner eigenen Uhr für die Dauer des Spaziergangs

$$t_W = \left(\frac{L}{u} + \frac{Lv}{c^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ablesen.

Wie *weit* geht der Spaziergänger von außen betrachtet? In der Zeit t_W bewegt sich der Zug um die Strecke $v \cdot t_W$ weiter, daher bewegt sich der Spaziergänger um diese Strecke plus die Länge des Zuges weiter. Wir erinnern uns, dass der Zug von außen betrachtet kürzer ist! Es folgt also insgesamt, dass die von dem Spaziergänger *relativ zum Erdboden* gemessene zurückgelegte Strecke

$$\begin{aligned} d_W &= v \cdot t_W + L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= v \cdot \left(\frac{L}{u} + \frac{Lv}{c^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= \left(\frac{vL}{u} + \frac{Lv^2}{c^2} + L - \frac{Lv^2}{c^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= L \cdot \left(1 + \frac{v}{u}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

beträgt.

Die gesuchte *Geschwindigkeit* des Spaziergängers relativ zum Erdboden gemessen beträgt schlicht und einfach $\frac{d_W}{t_W}$ und kann mit Hilfe der oben gefundenen Ausdrücke leicht berechnet werden zu

$$\frac{d_W}{t_W} = \frac{1 + \frac{v}{u}}{\frac{1}{u} + \frac{v}{c^2}} = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

Dies ist die geeignete Formel um Geschwindigkeiten zu addieren.[1] Wir bemerken, dass diese Formel bei kleinen Geschwindigkeiten die korrekte Lösung $u + v$

[1] Anm. d. Ü.: Diese Formel nennt man auch *Additionstheorem für Geschwindigkeiten.*

ergibt, und wenn u oder v gleich c ist, erhält man für die Summe der beiden Geschwindigkeiten immer c.

Übung 1: Die obige direkte Herleitung des Geschwindigkeitsadditionstheorems ist äquivalent zu einer erneuten Herleitung der Lorentztransformationen. Die Gleichung, die die Bewegung des Spaziergängers im Zug angibt, lautet $x' = ut'$. Substituiere dies in die Lorentztransformationsgleichungen und zeige, dass dies zu einer Bewegungsgleichung des Spaziergängers bezüglich des Erdbodens führt, die die Form $x = w \cdot t$ hat, wobei die Geschwindigkeit w relativ zum Erdboden gemäß der oben hergeleiteten Geschwindigkeitsadditionsformel entspricht!

Übung 2: Nehmen wir an, ein Raumschiff ist mit einer Batterie einmal verwendbarer Raketentriebwerke ausgestattet, die jede für sich das Raumschiff von Null auf $\frac{c}{2}$ beschleunigen können. Das Raumschiff verwendet eine Rakete um das Sonnensystem zu verlassen (wir vernachlässigen hier einmal die Erdanziehung) und bewegt sich dann mit $\frac{c}{2}$ relativ zu uns in den Tiefen des Raums. Nun zündet es sein zweites Raketentriebwerk unter Beibehaltung der Richtung. — Berechne die neue Geschwindigkeit des Raumschiffs! Kann man irgendwelche allgemeinen Schlussfolgerungen aus dem Ergebnis erzielen?

10.1 Ein Gang quer durch den Zug

Wir stellen uns nun einen ziemlich breiten Zug der Breite b vor, und der Spaziergänger beginnt nun einen Gang quer durch den Zug, der nun auf beiden Seiten mit einer Uhr ausgestattet ist. Die Uhr, an der er startet, zeigt $t = 0$ an, wenn er losgeht. Bei einer Laufgeschwindigkeit von $u_{y'}$ (wir legen die y–Achse quer durch den Zug) ergibt sich bei seiner Ankunft an der gegenüberliegenden Uhr eine dortige Anzeige von $\frac{b}{u_{y'}}$. Wie sieht das für den außenstehenden Beobachter aus? — Die Breite des Zuges wird gleich bleiben, da es keine Lorentzkontraktion in y–Richtung für Objekte gibt, die sich in x–Richtung bewegen. Die beiden Uhren werden auch von außen gesehen synchronisiert sein, da sie einen Abstand entlang der y–Richtung, aber nicht längs der x–Richtung gemessen haben. Es handelt sich jedoch um Uhren, die sich bezüglich des außenstehenden Beobachters mit relativistischer Geschwindigkeit bewegen, daher wird der Außenstehende den üblichen Zeitdilatationsfaktor wahrnehmen. Das heißt, wenn die Uhren auf dem Zug $\frac{b}{u_{y'}}$ anzeigen, wird auf den Uhren auf dem Erdboden

$$\frac{b}{u_{y'} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

zu sehen sein.

Daher erscheint die Überquerung des Zuges aus der Sicht eines außenstehenden Betrachters verlangsamt um den Zeitdilatationsfaktor, genau wie jede andere Aktivität im Zug.
Wenn man nun eine konstante Bewegung in eine beliebige Richtung $(u_{x'}, u_{y'})$ innerhalb des Zuges betrachtet, transformiert sich die Geschwindigkeit in einer komplexeren Weise, weil die Uhren zu Beginn und am Ende des Weges nun einen Abstand längs der x–Richtung gemessen haben. Falls diese Uhren eine verstrichene Zeit von $\frac{b}{u_y}$ messen, würde der außenstehende Beobachter einen Term addieren, der die fehlende Synchronisation der Uhren berücksichtigt,

$$\frac{Lv}{c^2} = \frac{b \cdot u_{x'}}{u_{y'}} \cdot \frac{v}{c^2}.$$

Daraus ergibt sich für die im äußeren System verstrichene Zeit der Ausdruck

$$t_W = \frac{\frac{b}{u_{y'}} + \frac{b \cdot u_{x'}}{u_{y'}} \cdot \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Aus dieser Gleichung folgern wir die allgemeine Formel für die Transformation von beliebig gerichteten Geschwindigkeiten:

$$u_y = \frac{u_{y'} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_{x'} \cdot v}{c^2}}$$

Für den Spezialfall, dass jemand auf direktem Wege den Zug überquert, so dass also $u_{x'} = 0$ ist, erhalten wir das weiter oben erhaltene Ergebnis, dass die Transversalgeschwindigkeit einfach um den Zeitdilatationsfaktor verringert wird.

10.2 Test des Geschwindigkeitsadditionstheorems

Der erste Test des obigen Theorems wurde erst in den fünfziger Jahren des neunzehnten Jahrhunderts durchgeführt! Zwei französische Physiker, Fizeau und Foucault, maßen die Lichtgeschwindigkeit in Wasser, und fanden als Wert $\frac{c}{n}$, wobei n der Brechungsindex von Wasser ist, ungefähr 1,33. (Dies war genau das Ergebnis, das von der Wellentheorie des Lichts vorhergesagt worden war.) Daraufhin maßen sie die Lichtgeschwindigkeit (relativ zum Erdboden) in fließendem Wasser, indem sie Licht durch eine Röhre schickten, durch die Wasser

mit der Geschwindigkeit v floss. Sie entdeckten, dass die Lichtgeschwindigkeit relativ zur äußeren Umgebung nicht etwa $v + \frac{c}{n}$ betrug, sondern dass es einen zusätzlichen Term gab, nämlich $v + \frac{c}{n} - \frac{v}{n^2}$. Ihre (falsche) Erklärung bestand darin, dass das Licht eine komplizierte Kombination aus Wellen im Wasser und Wellen im Äther sei, und dass das Wasser den Äther nur teilweise mit sich zog, so dass das Licht nicht die volle Geschwindigkeit v des Wassers zu seiner eigenen Geschwindigkeit $\frac{c}{n}$ hinzugefügt bekam.
Die wahre Erklärung des zusätzlichen Terms ist viel einfacher — Geschwindigkeiten addieren sich nicht einfach! Um die Geschwindigkeit v zur Geschwindigkeit $\frac{c}{n}$ zu addieren, muss man das obige Additionstheorem benutzen, was im vorliegenden Fall für die resultierende Geschwindigkeit den Wert

$$\frac{v + \frac{c}{n}}{1 + \frac{v}{nc}}$$

ergibt. Nun ist v aber sehr viel kleiner als c bzw. $\frac{c}{n}$, daher kann man $\frac{1}{1+\frac{v}{nc}}$ angenähert auch schreiben als $1 - \frac{v}{nc}$, was dann den folgenden Ausdruck ergibt:

$$\left(v + \frac{c}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{v}{nc}\right)$$

Multipliziert man dieses aus, erhält man

$$v + \frac{c}{n} - \frac{v}{n^2} - \frac{v}{n} \cdot \frac{v}{c},$$

und der letzte Term ist um den Faktor $\frac{v}{c}$ kleiner als v und daher vernachlässigbar.
Daher ist dieses Experiment aus der Mitte des neunzehnten Jahrhunderts, das mit einem „Mitschleifen des Äthers“ erklärt wurde, ohne Wissen der Experimentatoren in Wirklichkeit eine Bestätigung des Additionstheorems für Geschwindigkeiten gewesen! Natürlich gibt es viele weitere Bestätigungen. Zum Beispiel die Tatsache, dass jede Geschwindigkeit, die man zu c addiert, wiederum c ergibt. Außerdem deutet die Formel darauf hin, dass die Lichtgeschwindigkeit eine Grenze für die Geschwindigkeit sämtlicher Objekte darstellt. Dies ist ein Thema, mit dem wir uns im nächsten Kapitel beschäftigen werden.

11 Grundbegriffe der klassischen Dynamik

11.1 Impuls

An dieser Stelle wiederholen wir einige weitere Konzepte, die sich wie im Rahmen der klassischen Dynamik bei der Beschreibung von relativistischen Bewegungen als gleichfalls nützlich erweisen werden. Der erste dieser Begriffe, der *Impuls*, wurde in Wirklichkeit von dem französischen Wissenschaftler und Philosophen Descartes, also schon vor Newton, eingeführt. Die Idee von Descartes versteht man am besten anhand eines einfachen Beispiels: Wir denken uns eine Person, die zum Beispiel 45 kg wiegt, die bewegungslos auf hochwertigen, d. h. reibungslosen Rollerskates auf einem ebenen Untergrund steht. Ein fünf Kilogramm schwerer Medizinball wird direkt von vorne auf diese Person geworfen, und zwar aus kurzer Entfernung, so dass wir uns die Flugkurve des Balls näherungsweise als geradlinig vorstellen können. Sie fängt den Ball und hält ihn fest, so dass sie aufgrund des Aufpralls rückwärts zu fahren beginnt. Wir haben übrigens ihr Gewicht so gewählt, dass sie mit dem Ball zusammen zehnmal so viel Masse hat wie der Ball alleine. Wenn man dieses Experiment sorgfältig durchführt, stellt man fest, dass sie mit dem Ball zusammen mit genau einem Zehntel der Geschwindigkeit rückwärts rollt, die der Ball vor dem Aufprall hatte. Wenn also der Ball mit einer Geschwindigkeit von 5 Metern pro Sekunde geworfen wurde, rollt sie mit dem gefangenen Ball mit einem halben Meter pro Sekunde zurück. Es ist verführerisch daraus den Schluss zu ziehen, dass die gesamte „Bewegungsmenge“ vor und nach dem Fangen des Balles gleich bleibt, da wir nach dem Aufprall die zehnfache Masse erhalten haben, die sich mit einem Zehntel der ursprünglichen Geschwindigkeit fortbewegt.
Überlegungen und Experimente dieser Art führten Descartes dazu, das Konzept des *Impulses* zu erfinden, worunter die „Bewegungsmenge“ oder in Alltagssprache der „Schwung“ zu verstehen ist, und festzulegen, dass der Impuls eines sich bewegenden Körpers gleich dem Produkt aus seiner Masse und seiner Geschwindigkeit ist. Der Impuls wird traditionell mit dem Buchstaben p abgekürzt, daher lautet die mathematische Definition:

$$\text{Impuls } p = m \cdot v$$

für einen Körper der Masse m, der sich mit der Geschwindigkeit v bewegt. Es ist dann offensichtlich, dass in dem obigen Szenario einer Frau, die einen Medizinball fängt, der Gesamtimpuls vor und nach dem Aufprall des Balles gleich bleibt. Vorher hatte nur der Ball einen Impuls von $p = 5\,\mathrm{kg} \cdot 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 25\,\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Nach dem Fangen des Balles bewegt sich eine Gesamtmasse von 50 kg mit einer Geschwindigkeit von 0,5 Metern pro Sekunde, daher beträgt der Gesamtimpuls nach dem Aufprall $p' = 50\,\mathrm{kg} \cdot 0,5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 25\,\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Der Gesamtbetrag bleibt also die ganze Zeit über konstant. Wir haben diese Zahlen natürlich erfunden, aber sie stimmen genau mit den experimentellen Erfahrungen überein.
Es gibt hier jedoch ein Problem — man kann sich relativ einfach Stöße vorstellen, bei denen der Impuls, wie wir ihn oben definiert haben, nicht konstant bleibt. Was ist zum Beispiel mit zwei gleich schweren Personen auf Rollerskates, die mit gleich großen Geschwindigkeiten aufeinander zu fahren — und wenn sie sich treffen, halten sie sich an den Händen fest und kommen auf diese Weise zum Stehen? Es ist einsichtig, dass vor dem Treffen eine Menge Bewegung vorhanden war und nachher überhaupt keine mehr, das heißt der Impuls ist sicherlich nicht gleich geblieben! In der Sprache der Physik würde es heißen, der Impuls sei nicht erhalten geblieben. Descartes hatte für lange Zeit an diesem Problem zu knacken, aber er wurde von dem Holländer Christian Huygens gerettet, der herausstellte, dass das Problem in einer konsistenten Weise gelöst werden konnte, wenn man nicht darauf bestand, dass der Impuls eine positive Zahl sein musste.
Mit anderen Worten: *Wenn etwas, das sich nach rechts bewegt, einen positiven Impuls hat, dann muss man einen Körper, der sich nach links bewegt, mit einem negativen Impuls versehen.* Mit dieser Konvention würden zwei Personen gleicher Masse, die sich mit gleicher Geschwindigkeit aufeinander zu bewegen, einen Gesamtimpuls von Null haben, und daher würde der Gesamtimpuls, wenn sie nach ihrem Treffen wie oben beschrieben zum Stehen gekommen sind, weiterhin Null betragen und damit unverändert geblieben sein.
Natürlich haben wir uns in der obigen Diskussion auf Bewegungen längs einer Geraden beschränkt. Es sollte offensichtlich sein, dass Huygens, um zu einer geeigneten Definition des Impulses zu kommen, der bei Stößen erhalten bleibt, von dem reinen Betrag der Geschwindigkeit zu dem vektoriellen Geschwindigkeitsbegriff übergehen musste. Aus diesem Grunde ergibt sich also auch für den Impuls, dass es sich um eine vektorielle Größe handelt:

$$\mathrm{Impuls}\ \vec{\mathrm{p}} = \mathrm{m} \cdot \vec{\mathrm{v}}$$

Es stellt sich heraus, dass bei jeder Art von Stößen zwischen zwei Körpern (wo kein dritter Körper, wie zum Beispiel der Erdboden, stört) der Gesamtimpuls erhalten bleibt. Es spielt keine Rolle, ob die beiden Körper nach dem Stoß aneinander kleben bleiben oder voneinander abprallen, oder welche Art von Kräften sie aufeinander ausüben. Die Impulserhaltung ist daher ein sehr allgemeines Gesetz, sehr unabhängig von den einzelnen Eigenschaften der Kollision.

11.2 Die Impulserhaltung und Newtons Axiome

Wie wir oben beschrieben haben, wurde der Begriff des Impulses sowie das allgemeine Konzept der Impulserhaltung von Descartes eingeführt, vor Newtons Zeit. Es stellt sich jedoch heraus, dass sich die Impulserhaltung aus den Newton'schen Axiomen herleiten lässt. Diese beinhalten nämlich im Prizip sämtliche mit Stößen verbundenen Prozesse und müssen daher auch die Impulserhaltung umfassen.
Um diese Zusammenhänge zu verstehen betrachten wir zunächst das zweite Newton'sche Axiom, das die Beschleunigung a eines Körpers der Masse m mit einer äußeren Kraft F in Verbindung bringt, die auf den Körper wirkt:

$$F = m \cdot a, \qquad \text{oder} \qquad \text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}$$

Wir erinnern uns, dass die Beschleunigung die Änderungsrate der Geschwindigkeit ist, daher können wir das zweite Axiom auch schreiben als

$$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad \text{oder} \quad \text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Änderungsrate der Geschwindigkeit.}$$

Nun ist der Impuls aber definiert als $p = m \cdot v$. Das bedeutet, dass für ein Objekt mit konstanter Masse (was natürlich fast immer der Fall ist!) folgendes gilt:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

oder

$$\text{Änderungsrate des Impulses} = \text{Masse} \cdot \text{Änderungsrate der Geschwindigkeit.}$$

Das bedeutet, dass man das zweite Newton'sche Axiom auch schreiben kann als

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}, \qquad \text{oder} \qquad \text{Kraft} = \text{Änderungsrate des Impulses.}$$

Wir denken uns nun eine Kollision oder sonstige Art gegenseitiger Interaktion zwischen zwei Körpern A und B. Gemäß dem dritten Newton'schen Axiom („actio gleich reactio") ist die Kraft, die A auf B ausübt, immer gleich groß wie die Kraft, die B auf A ausübt, nur entgegengesetzt gerichtet. Da (wie wir gerade gezeigt haben) die Kraft mit der Änderungsrate (also der zeitlichen Ableitung) des Impulses gleichzusetzen ist, folgt daraus, dass während des gesamten Interaktionsprozesses die zeitliche Ableitung des Impulses von A

genau das Negative der zeitlichen Ableitung des Impulses von B ist. Anders ausgedrückt sind die Vektoren $\dot{\vec{A}}$ und $\dot{\vec{B}}$ gleich lang, zeigen aber in entgegengesetzte Richtung. Das bedeutet, dass B genau in demselben Maße an Impuls verliert wie A an Impuls gewinnt und umgekehrt, so dass der Gesamtimpuls erhalten bleibt. Da dies den gesamten Stoßprozess über gilt, muss der Gesamtimpuls am Ende genau so groß sein wie zu Beginn.
An dieser Stelle mag der Leser denken: Wozu das Ganze? Wir wissen schon, dass die Newton'schen Axiome überall gültig sind, wieso sollen wir uns dann über eine bestimmte ihrer Konsequenzen den Kopf zerbrechen? Die Antwort lautet folgendermaßen: Obwohl wir von der Gültigkeit der Newton'schen Gesetze wissen, muss uns das nicht unbedingt sehr viel helfen, wenn zum Beispiel zwei komplizierte Gebilde einen Stoß ausführen, weil wir dann die beteiligten Kräfte nicht kennen. Nichtsdestotrotz wissen wir, dass der Gesamtimpuls bei dem Stoß erhalten bleibt, so dass wir, wenn die beiden Körper aneinander haften bleiben und kein Stück absplittert, die Endgeschwindigkeit des neu entstandenen Körpers allein aus der Impulserhaltung berechnen können, ohne irgendwelche Details der Kollision zu kennen.

11.3 Arbeit

Der Begriff „Arbeit“ besitzt in der Physik eine engere Bedeutung als im alltäglichen Leben. Zunächst einmal bezieht er sich natürlich auf körperliche Arbeit, und zweitens muss etwas vollbracht werden. Wenn man eine Bücherkiste vom Boden hochhebt und auf ein Regal stellt, hat man Arbeit im physikalischen Sinne geleistet. Wenn die Kiste zu schwer ist, so dass man an ihr bis zur Erschöpfung zieht und zerrt ohne sie zu bewegen, zählt dies nicht als Arbeit.
Im physikalischen Sinne wird dann Arbeit verrichtet, wenn eine Kraft einen Körper schiebt und sich dieser Körper in die Richtung bewegt, in die er geschoben wurde (ziehen ist auch erlaubt). Wir stellen uns vor, dass wir die Bücherkiste auf ein hoch gelegenes Regalbrett heben. Wenn man die Kiste mit konstanter Geschwindigkeit hochhebt, gleicht die Kraft, mit der man die Kiste anhebt, genau die Gewichtskraft aus, denn sonst würde die Kiste beschleunigt. (Natürlich muss man die Kiste im ersten Moment durch Ausüben einer etwas größeren Kraft etwas beschleunigen, dafür muss man beim Abbremsen vor Erreichen des gewünschten Regalbretts eine entsprechend geringere Kraft ausüben.) Es ist offensichtlich, dass man zweimal so viel Arbeit verrichten muss, um eine doppelt so schwere Kiste genau so hoch zu heben, daher ist die Menge an verrichteter Arbeit proportional zur ausgeübten Kraft. Es ist genauso klar, dass die Arbeit von der Höhe des Regalbretts abhängt. Zusammengenommen ergibt sich die folgende Definition der Arbeit:

$$W = F_s \cdot s, \qquad \text{oder} \qquad \text{Arbeit} = \text{Kraft} \cdot \text{Wegstrecke},$$

wobei nur die Wegstrecke entlang der Richtung, in die die Kraft zeigt, gerechnet werden darf. Gemäß dieser Definition zählt es nicht als Arbeit, wenn man eine Bücherkiste quer durch den Raum trägt und in gleicher Höhe wieder abstellt, denn obwohl man eine Kraft ausüben muss, damit die Kiste nicht zu Boden fällt, bewegt man die Kiste ja nicht in diese Richtung, sondern seitwärts dazu.

Um eine quantitativere Vorstellung davon zu bekommen, wie viel Arbeit verrichtet wird, brauchen wir eine Maßeinheit, um die Arbeit zu messen. Bei der Verwendung der Definition $W = F \cdot s$ werden wir die zurückgelegte Strecke wie gewohnt in Metern messen, aber wir haben bisher nicht über die Maßeinheit der Kraft gesprochen. Die einfachste Möglichkeit, sich eine Maßeinheit für die Kraft auszudenken, besteht darin, das zweite Newton'sche Axiom $F = m \cdot a$ auszunutzen. Die natürliche Einheitskraft wäre diejenige, die eine Einheitsmasse von einem Kilogramm ohne Vorhandensein von störenden Reibungskräften um einen Meter pro Quadratsekunde beschleunigt, so dass sich die anfangs ruhende Masse nach zwei Sekunden mit einer Geschwindigkeit von 2 Metern pro Sekunde bewegt, usw. *Diese Krafteinheit nennt man ein* **Newton** (wie wir bereits weiter oben besprochen haben). Wir bemerken, dass ein Kilogrammstück eine Beschleunigung von 10 Metern pro Quadratsekunde erfährt, wenn man es fallen lässt. Das bedeutet, dass sein Gewicht, d. h. die Gravitationskraft zur Erde hin, 10 Newton betragen muss. Hieraus können wir folgern, dass eine Gewichtskraft von einem Newton auf der Erde einer Masse von 100 Gramm entspricht, also z. B. einer Tafel Schokolade.

Die Erdbeschleunigung, 10 Meter pro Quadratsekunde, wird oft mit g abgekürzt. [1] Wenn wir eine Masse von m Kilogramm haben, wissen wir, dass sie mit der Beschleunigung g zu Boden fallen wird, wenn sie fallen gelassen wird, daher beträgt gemäß Newtons zweitem Axiom die Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$.

Nun zurück zur *Arbeit*. Da die Arbeit als $W = F \cdot s$ definiert ist, wäre die natürliche „Einheitsarbeit" diejenige, wo eine Kraft von einem Newton einen Körper um einen Meter fortbewegt. Das entspräche etwa dem Anheben einer Tafel Schokolade um einen Meter. *Diese Menge an physikalischer Arbeit nennt man ein* **Joule**, zu Ehren eines englischen Brauers.

Zuguterletzt ist es oft nützlich, eine Maßeinheit für die zeitliche Ableitung der Arbeit zu haben, also die Rate, mit der sich die an einem Objekt verrichtete Arbeitsmenge verändert. Diese physikalische Größe nennt man „Leistung" . Die natürliche Maßeinheit hierfür ist offensichtlich ein Joule pro Sekunde, und hierfür sagt man auch *Watt*. Um ein Gefühl für die zeitliche Ableitung der Arbeit zu bekommen, stellen wir uns vor, dass wir eine Treppe hinaufsteigen.

[1] Um genauer zu sein beträgt die Erdbeschleunigung etwa 9,81 Meter pro Quadratsekunde, wobei sie dann auch noch je nach Standpunkt auf der Erde etwas variiert, aber das würde für die folgenden Überlegungen nur die Zahlen komplizierter machen, ohne die physikalischen Hintergründe deswegen genauer darzustellen, daher bleiben wir im folgenden bei $10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Die typische Höhe einer Stufe beträgt 20 cm, daher wird man bei normalem Tempo etwa 0,4 m pro Sekunde an Höhe gewinnen. Wenn unsere Masse 70 kg beträgt (der Leser kann gerne an dieser Stelle seine eigene Masse einsetzen!), entspricht dies einer Gewichtskraft von etwa 700 Newton. Es werden also von dem Treppensteigenden pro Sekunde $W = 700\,\mathrm{N} \cdot 0,4\,\mathrm{m} = 280$ Joule an Arbeit verrichtet, das heißt er leistet 280 Watt. Die meisten Leute können eine solche Leistung nicht über einen längeren Zeitraum erbringen. Eine verbreitete, wenn auch heute nicht mehr standardmäßig verwendete Maßeinheit für die Leistung (insbesondere bei Kraftfahrzeugen) ist die Pferdestärke (abgekürzt PS), die einer Leistung von etwa 746 Watt entspricht.

11.4 Energie

Energie ist die in einem Körper gespeicherte Fähigkeit, Arbeit zu verrichten.
Zum Beispiel muss man Arbeit verrichten, um einen Nagel in ein Holzstück hineinzuschlagen — eine Kraft muss den Nagel über eine bestimmte Strecke stoßen, gegen den Widerstand durch das Holz. Ein sich bewegender Hammer, der den Nagel trifft, kann ihn in das Holz hineintreiben. Ein unbewegter Hammer, der nur auf den Nagel gelegt wird, bewirkt nichts. Der sich bewegende Hammer hat Energie — die Fähigkeit, den Nagel hineinzuschlagen —, weil er sich bewegt. Diese Energie des Hammers nennt man *kinetische Energie*. „Kinetisch" ist nur das griechische Wort für Bewegung. Es ist übrigens das Ursprungswort für „cinema" , das Kino als der Ort, wo man *bewegte* Bilder sehen kann.
Eine andere Möglichkeit, den Nagel in das Holz zu schlagen, falls man gut zielen kann, besteht darin, den Hammer aus einer geeigneten Höhe auf den Nagel fallen zu lassen. Bis der Hammer den Nagel erreicht, hat er kinetische Energie. Er hat diese Energie, weil ihn die Gravitationskraft auf seinem Weg nach unten beschleunigt hat. Aber diese Energie kam nicht etwa aus dem Nichts. Zuvor musste Arbeit verrichtet werden, um den Hammer auf die Höhe anzuheben, aus der er auf den Nagel fallen gelassen wurde. Diese Arbeit ist aber nach der Formel $W = F \cdot s$ gerade die Gewichtskraft des Hammers multipliziert mit der Höhe, um die er angehoben wurde. Dies ist aber genau die gleiche Arbeitsmenge, die die Erdanziehung am Hammer verrichtet, wenn sie ihn beim freien Fall auf den Nagel zu beschleunigt. Aus diesem Grund kann man sich vorstellen, dass der Hammer, solange er am höchsten Punkt darauf wartet, fallen gelassen zu werden, die Arbeit gespeichert hat, die an ihm beim Hochheben verrichtet wurde. Diese kann jederzeit wieder freigegeben werden, indem der Hammer herunterfällt. Diese „gespeicherte Arbeit" nennt man *potentielle Energie*, da sie das Potential hat, in kinetische Energie umgewandelt zu werden, indem man den Hammer einfach fallen lässt.
Um ein Beispiel zu geben, nehmen wir einmal an, wir haben einen Hammer

mit einer Masse von 2 kg und wir heben ihn um 5 Meter an. Das Gewicht bzw. die Gewichtskraft des Hammers, beträgt 20 Newton (wir erinnern uns, dass der Hammer im freien Fall mit 10 Metern pro Quadratsekunde beschleunigt würde, wie alle anderen Dinge auch),und daher beträgt die beim Anheben des Hammers verrichtete Arbeit $W = 20\,\mathrm{N} \cdot 5\,\mathrm{m} = 100$ Joule, da das Heben des Hammers bei konstanter Geschwindigkeit eine Hubkraft erfordert, die die Gewichtskraft gerade aufhebt. Diese 100 Joule sind nun im Hammer jederzeit abrufbar gespeichert, das heißt, es handelt sich um potentielle Energie. Wenn man den Hammer loslässt, wandelt sich die potentielle Energie immer mehr in kinetische Energie um. Da die Kraft, mit der die Erdanziehung den Hammer beschleunigt, den gleichen Betrag hat wie die Kraft, mit der der Hammer angehoben wurde, und da die Wegstrecke bis zum Auftreffen auf den Boden (bzw. den Nagel) die gleiche geblieben ist, entspricht die Arbeitsmenge, die die Erdanziehung am Hammer verrichtet, genau der Arbeitsmenge, die man beim Hochheben verrichtet hat. Daher besitzt der Hammer beim Auftreffen auf den Nagel ebenfalls eine nunmehr kinetische Energie von 100 Joule. Man sagt, dass die potentielle Energie sich vollständig in kinetische Energie umgewandelt hat, die dann dazu benutzt wird, um den Nagel ins Holz zu treiben.
Wir sollten an dieser Stelle betonen, dass Energie und Arbeit in derselben Maßeinheit gemessen werden, nämlich Joule. Im obigen Beispiel erhöht die am Hammer verrichtete Hubarbeit seine potentielle Energie um genau den gleichen Betrag.

Aus den obigen Erläuterungen wissen wir, dass eine Masse von m Kilogramm eine Gewichtskraft von $m \cdot g$ Newton erfährt. Hieraus folgt, dass man zum Anheben dieser Masse auf eine Höhe von h Metern eine Arbeit verrichten muss, die $m \cdot g \cdot h$ Joule beträgt. Dies entspricht der potentiellen Energie, die durch das Anheben in dem Körper gespeichert wurde. Also gilt:

$$W_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

Historisch gesehen war dies die Art und Weise, wie Energie gespeichert wurde, um Uhren zu betreiben: Große Gewichte wurden einmal pro Woche angehoben, und während sie langsam zu Boden sanken, wurde die freigegebene Energie dazu benutzt, die Zahnräder und, über einen genialen Mechanismus, das Pendel anzutreiben. Das Problem war, dass diese Methode besonders hohe Standuhren erforderte, um die Gewichte genügend hoch ziehen zu können. Daher wurden die Uhren, bei denen die Energie in einer aufgezogenen Feder gespeichert wurde, sehr schnell populärer, nachdem sie erfunden worden waren. Eine gespannte bzw. gedehnte Feder bietet eine andere Möglichkeit, Energie zu speichern. Man muss Arbeit an einer Feder verrichten, um eine Feder zu dehnen, aber diese Arbeit wird (abgesehen von Reibungseffekten) vollkommen wieder freigesetzt, wenn man die Feder loslässt. Die in einer gedehnten Feder gespeicherte potentielle Energie nennt man oft *elastische Energie* oder

Spannenergie, während man die durch das Gravitationsfeld verursachte potentielle Energie eines angehobenen Körpers auch *Lageenergie* nennt.

11.5 Kinetische Energie

Wir haben oben eine explizite Methode angegeben, den Zuwachs an potentieller Energie einer Masse m zu berechnen, die um eine Höhe h angehoben wird. Es handelt sich dabei nur um die Arbeit, die von der anhebenden Kraft verrichtet wird, also $W_{pot} = m \cdot g \cdot h$.
Kinetische Energie wird erzeugt, wenn eine Kraft einen Körper beschleunigt und dabei seine Geschwindigkeit erhöht. Wie wir das bei der potentiellen Energie auch getan haben, können wir eine Formel für die kinetische Energie finden, indem wir berechnen, wie viel Arbeit die beschleunigende Kraft verrichtet, wenn sie den Körper auf eine bestimmte Geschwindigkeit beschleunigt.
Wir erinnern uns zunächst, dass eine Kraft nur dann Arbeit verrichtet, wenn sie in Richtung der Bewegung zeigt. Zum Beispiel steht bei der Kreisbewegung eines die Erde umrundenden Satelliten die die Bewegung verursachende Kraft, die als Zentipetalkraft wirkende Anziehungskraft der Erde, jederzeit senkrecht auf der Bewegungsrichtung, was zur Folge hat, dass sich der Satellit der Erdoberfläche nicht annähert. Aus diesem Grund bewegt sich der Satellit auch kein Stück in die Richtung, in die die Gravitation ihn zieht, und daher wird in diesem Fall auch keine Arbeit von der Gravitation am Satelliten verrichtet.
Wir betrachten zum Kontrast die Arbeit, die die Gravitationskraft an einem Stein verrichtet, der einfach von einer Klippe aus hinuntergeworfen wird. Wir wollen nun konkret werden und annehmen, dass es sich um einen 1 kg schweren Stein handelt, daher beträgt die Gravitationskraft 10 Newton nach unten. Nach Ablauf einer Sekunde wird der Stein eine Geschwindigkeit von 10 Metern pro Sekunde haben, und er hat dann eine Strecke von 5 Metern zurückgelegt. Die Arbeit, die die Gravitation bis dahin an ihm verrichtet hat, beträgt $W = 10\,\mathrm{N} \cdot 5\,\mathrm{m} = 50\,\mathrm{J}$, also sind 50 Joule die kinetische Energie, die eine Masse von 1 Kilogramm bei einer Geschwindigkeit von 10 Metern pro Sekunde hat.
In welcher Weise nimmt die kinetische Energie mit wachsender Geschwindigkeit zu? Hierfür denken wir einmal über die Situation nach 2 Sekunden nach. Die Masse hat ihre Geschwindigkeit auf 20 Meter pro Sekunde gesteigert. Sie ist über eine gesamte Strecke von 20 Metern gefallen (weil ihre durchschnittliche Geschwindigkeit während der Fallzeit von 2 Sekunden 10 Meter pro Sekunden betrug). Daher beträgt die in diesen zwei Sekunden verrichtete Arbeit $W = 10\,\mathrm{N} \cdot 20\,\mathrm{m} = 200\,\mathrm{J}$.
Wir haben also herausgefunden, dass die kinetische Energie einer Masse von einem Kilogramm, bei $10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ 50 Joule beträgt, während sie bei $20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ 200 Joule

beträgt. Es ist nicht schwierig herauszubekommen, dass derselbe Körper bei $30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ eine kinetische Energie von 450 Joule besitzt. Der zentrale Punkt ist, dass die Geschwindigkeit des Körpers linear mit der Zeit anwächst, aber die Arbeit, die die Gravitation am Körper verrichtet, von der zurückgelegten Strecke abhängt, die aber quadratisch von der Zeit abhängt. Daher hängt die kinetische Energie eines fallenden Steins quadratisch von der Zeit und damit auch quadratisch von der Geschwindigkeit ab. Für Steine mit unterschiedlicher Masse wird die kinetische Energie bei gleicher Geschwindigkeit proportional zur Masse des Steins sein, da die Gewichtskraft proportional zur Masse ist, und die Arbeit im Gravitationsfeld proportional zur Gewichtskraft ist. Wir können also für einen Körper der Masse m und der Geschwindigkeit v die folgende allgemeine Formel für die kinetische Energie aufstellen:

$$W_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$$

Übungen für den Leser:

1. Sowohl der Impuls als auch die kinetische Energie eines Körpers sind in gewissem Sinne ein Maß für seine Bewegungsmenge. In welcher Weise unterscheiden sie sich?

2. Kann ein Körper seinen Impuls verändern, ohne dabei seine kinetische Energie zu verändern?

3. Kann ein Körper seine kinetische Energie verändern, ohne dabei seinen Impuls zu verändern?

4. Nehmen wir an, zwei Lehmklumpen gleicher Masse bewegen sich mit gleicher Geschwindigkeit aufeinander zu, prallen aufeinander und bleiben aneinander haften. Bleibt der Impuls dabei erhalten? Bleibt die kinetische Energie dabei erhalten?

5. Wenn ein Stein von einer Klippe herunterfällt, verändern sich sowohl seine potentielle als auch seine kinetische Energie kontinuierlich. Wie verhalten sich diese Änderungen zueinander?

11.6 Impuls hat eine Richtung

Wie wir im vorigen Kapitel erörtert haben, hatte Descartes bereits vor der Formulierung der Newton'schen Gesetze, mit ein bisschen Hilfe durch Huygens, eine tiefe dynamische Wahrheit entdeckt: Bei jedem Stoßprozess, oder genauer gesagt, bei jeder Interaktion zweier Körper, bleibt der gesamte Impuls — ein Maß für die Bewegungsmenge — erhalten. Der Impuls eines Körpers ist definiert als das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit und ist daher ein

Vektor — der Impuls hat einen Betrag *und eine Richtung*. Wenn man auf Rollschuhen ohne Reibung steht und einen Ball wirft, bewegt man sich rückwärts — man hat einen gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Impuls wie der Ball, so dass der Gesamtimpuls Null bleibt. Raketen funktionieren nach dem gleichen Prinzip, indem sie Materie mit großer Geschwindigkeit nach hinten ausströmen lassen. Ihre Funktionsweise besteht nicht darin, dass sie gegen die hinter ihnen liegende Luft stoßen, sie stoßen gegen den Stoff, den sie ausstoßen, so wie man gegen den Ball stößt, den man wirft, der einen dann zurückstößt, was die eigene Beschleunigung bewirkt.
Wer immer noch glaubt, dass sich Raketen wirklich von der Luft hinter ihnen abstoßen, sollte sich daran erinnern, dass sie auch im luftleeren Weltraum funktionieren. Als Goddard, einer der ersten Raketenpioniere (das Goddard Space Flight Center ist nach ihm benannt), über Raketen im Weltraum sprach, glaubte die Mehrheit, dass er seine Zeit vergeudete. Um einen Artikel aus der *New York Times* zu zitieren, der im Jahre 1921 geschrieben wurde:

> „Professor Goddard kennt die Beziehung zwischen actio und reactio nicht und die Notwendigkeit, dass da etwas Substanzielleres als Vakuum sein muss, das auf die actio reagieren kann. Er scheint die Grundkenntnisse nicht zu besitzen, die heutzutage täglich in unseren Schulen ausgebreitet werden.“

Offensichtlich hatten *die Schreiber der New York Times* nicht die Grundkenntnisse, die in diesem Kapitel ausgebreitet werden!
In der Tat folgt die Impulserhaltung während eines Stoßes wie oben beschrieben aus den Newton'schen Axiomen. Nichtsdestotrotz handelt es sich hierbei um ein allgemeineres, einfacheres Konzept — es hängt in keinster Weise von den Einzelheiten der Interaktion ab, usw. Diese Einfachheit gefiel Einstein offensichtlich, der davon überzeugt war, dass bei der Neuformulierung der Dynamik unter Einbeziehung der neuen Ideen von Zeit und Raum, die Impulserhaltung in jedem beliebigen Inertialsystem gültig sein müsse. Wie wir sehen werden, führte ihn das zu einigen überraschenden Folgerungen.

12 Relativistische Dynamik

12.1 Die bisherige Geschichte: Eine kurze Rückschau

Die erste in sich logische Aussage über das, was Physiker heutzutage Relativität nennen, war Galileos vor fast vierhundert Jahren beschriebene Entdeckung, dass man in einem geschlossenen Raum durch die Beobachtung der Bewegung von Gegenständen — seien es Lebewesen, geworfene Körper oder tropfende Gefäße — nicht unterscheiden kann, ob sich dieser Raum in Ruhe, z. B. in einem Gebäude, befindet oder sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, wie z. B. ein Raum unter Deck eines segelnden Schiffes. Physikalischer ausgedrückt hieße das, dass die Bewegungsgesetze in allen Inertialsystemen die gleiche Form haben. Das bedeutet, dass diese Gesetze in Wirklichkeit nur relative Positionen und Geschwindigkeiten beschreiben. Insbesondere heben diese Gesetze kein spezielles Inertialsystem als dasjenige hervor, das sich „wirklich in Ruhe“ befindet. Diese Aussage wurde später mathematischer hingeschrieben, und zwar in Form der Galilei–Transformationen. Wenn man diese einfachen linearen Gleichungen verwendete, konnte man eine Bewegung, die in einem Inertialsystem durch Analyse der Positionen und Geschwindigkeit beschrieben worden war, in eine Bewegung innerhalb eines anderen Inertialsystems übersetzen. Als Newton nach dem Tode Galileis seine drei Bewegungsgesetze formulierte, waren diese natürlich invariant bezüglich der Galilei–Transformationen, und daher in jedem Inertialsystem gültig.
Ungefähr vor zweihundert Jahren wurde es klar, dass Licht nicht nur ein Teilchenstrom war (wie Newton gedacht hatte), sondern dass es auch die Eigenschaften einer Welle zeigte. Dies führte natürlich zu der Frage, was es genau war, das sich bei einer Lichtwelle „wellte“, und der allgemeine Konsens war, dass der Raum mit einem Äther gefüllt war, und dass die Lichtwellen die Kräuselung dieses alldurchdringenden Äthers darstellten, analog zu Schallwellen in der Luft. Maxwell's Entdeckung, dass die von ihm aufgestellten Gleichungen zur Beschreibung elektromagnetischer Phänomene wellenartige Lösungen hatten, die eine Ausbreitungsgeschwindigkeit vorhersagten, die mit der gemessenen Lichtgeschwindigkeit sehr genau übereinstimmte, legten nahe, dass elektromagnetische Felder elastische Spannungen oder Deformatio-

nen des Äthers waren. Hieraus ergab sich, dass die Maxwell'schen Gleichungen vermutlich nur in dem System korrekt waren, in dem der Äther in Ruhe war. Sehr exakte Experimente, die den Äther hätten nachweisen können, scheiterten jedoch allesamt.
Fast genau vor hundert Jahren schlug Einstein vor, dass vielleicht alle physikalischen Gesetze in allen Inertialsystemen die gleiche Form haben, womit er die Ideen Galileis, die nur auf Bewegungen beschränkt geblieben waren, auf die später entdeckten Gesetze des Elektromagnetismus verallgemeinerte. Das implizierte, dass es überhaupt kein absolut ruhendes Inertialsystem geben konnte, noch nicht einmal für die Lichtausbreitung. Daraus folgte direkt, dass es keinen Äther geben konnte. Dies ist ein sehr attraktives uns einfaches Konzept: Die selben Gesetze sind in allen Bezugssystemen gültig. Was konnte vernünftiger als das sein? Wie wir gesehen haben, wirft dies aber viele von den Vorstellungen über Raum und Zeit über den Haufen, an die wir uns alle während unserer Sozialisation gewöhnt haben und die uns lieb und teuer geworden sind. Die zentrale Vorhersage lautet, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Bezugssystemen gleich sein muss, da sie eine direkte Folge der physikalischen Gesetze (d. h. der Maxwell–Gleichungen) ist, die in allen Systemen die gleiche Form haben.
Das heißt, dass die Geschwindigkeit eines bestimmten Lichtsignals immer als $3 \cdot 10^8$ Meter pro Sekunde gemessen werden wird, auch dann, wenn sie von verschiedenen Beobachtern gemessen wird, die sich mit hoher Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen, wobei beide Beobachter die Lichtgeschwindigkeit relativ zu sich selbst messen. Die Experimente haben jedenfalls immer wieder gezeigt, dass Einsteins elegante Entdeckung richtig ist, und wir mit unseren tiefen Überzeugungen auf der falschen Fährte sind.
Wir haben die kinematischen Konsequenzen von Einsteins Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit detailliert diskutiert — wie die Messung von Ort, Zeit und Geschwindigkeit in einem Bezugssystem sich zu den Messungen in einem anderen System verhalten, und wie man offensichtliche Paradoxa durch sorgfältige Analyse aus dem Weg räumen kann. Bis jetzt haben wir jedoch noch nicht genug über die dynamischen Aspekte nachgedacht. Wir wissen, dass die Newton'schen Bewegungsgesetze unter den Galileitransformationen invariant bleiben. Wir wissen nun, dass die Galilei–Transformationen in Wirklichkeit nur im Grenzfall kleiner, nichtrelativistischer Geschwindigkeiten korrekt sind. Daher sollten wir uns die Newton'schen Bewegungsgesetze noch einmal sorgfältig im Lichte unserer neuen Kenntnisse anschauen.

12.2 Wiederholung der Newton'schen Axiome

Newtons erstes Axiom, das Trägheitsprinzip, das aussagt, dass ein Objekt, auf das keine äußeren Kräfte wirken, in einer geradlinigen Bewegung mit kon-

stanter Geschwindigkeit fortfahren wird, ist in der speziellen Relativitätstheorie genauso gültig. Es gehört sogar mit zu der Definition eines Inertialsystems, dass dieses Prinzip in einem solchen gegeben ist, und die spezielle Relativitätstheorie beruht auf Transformationen zwischen Inertialsystemen.
Newtons zweites Axiom, geschrieben in der Form $F = m{\cdot}a$ kann so nicht wahr sein, wenn es im Rahmen der Relativitätstheorie gebraucht wird. Dies ergibt sich offensichtlich aus der Formel, die wir für die Addition von Geschwindigkeiten hergeleitet haben. Denken wir uns eine mehrstufige Rakete, von denen jede Stufe in der Lage ist, die jeweils übriggebliebenen Stufen vom Ruhezustand auf die Geschwindigkeit $\frac{c}{2}$ zu beschleunigen. Wir könnten die Stufen geschickt nacheinander zünden, so dass auf die Rakete eine ständige beschleunigende Kraft ausgeübt würde, die die Rakete schnell auf eine Geschwindigkeit größer als c bringen könnte. Wir wissen aber aus dem Geschwindigkeitsadditionstheorem, dass die Rakete niemals die Lichtgeschwindigkeit erreichen könnte. Offenbar bedarf Newtons zweites Axiom einer Überarbeitung.
Newtons drittes Axiom, actio=reactio, ist auch problematisch. Stellen wir uns eine anziehende Kraft zwischen zwei schnell bewegten Körpern vor. Wenn ihr gegenseitiger Abstand variiert, geschieht dies auch mit der Anziehungskraft. Wir könnten versucht sein zu sagen, dass die Kraft von A auf B zu jedem Zeitpunkt das Gegenteil der Kraft von B auf A ist, aber das impliziert gleichzeitige Messungen an zwei Körpern, die einen gewissen Abstand voneinander haben, und wenn die obige Aussage im System von A wahr wäre, wäre sie es nicht in dem System von B.

12.3 Die Erhaltungssätze

In der nichtrelativistischen Newton'schen Physik sagt uns das dritte Axiom, dass zwei wechselwirkende Körper gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Wechselwirkungskräfte spüren. Daher ergibt sich aus dem zweiten Axiom, dass die Änderungsrate des Impulses des einen Körpers entgegengesetzt gleich groß ist wie diejenige des anderen Körpers, und daraus ergibt sich, dass die gesamte Änderungsrate des Impulses bei einer solchen Wechselwirkung gleich Null ist. Daraus ergibt sich, dass für ein abgeschlossenes dynamisches System, in dem keine äußeren Kräfte wirken, der Gesamtimpuls immer erhalten bleibt. Dies ist der Impulserhaltungssatz. Er hängt nicht von den Einzelheiten der Wechselwirkungskraft ab, sondern nur davon, dass sie gleich groß entgegengerichtet sind.
Der andere große dynamische Erhaltungssatz ist der Energieerhaltungssatz. Dieser wurde erst lange Zeit nach Newton exakt formuliert, als es klar wurde, dass die durch Reibung erzeugte Wärme den Verlust bei der Summe von kinetischer und potentieller Energie in realen dynamischen Systemen exakt ausgleichen konnte.

Obwohl diese Erhaltungssätze ursprünglich aus der Sicht des Newton'schen Weltbildes formuliert worden waren, veranlassten sie Einstein, aufgrund ihrer sehr allgemeinen Natur anzunehmen, dass sie einen größeren Gültigkeitsbereich hatten. Aus diesem Grund nahm er als Arbeitshypothese an, dass sie in allen Inertialsystemen Gültigkeit besaßen, und erforschte die sich hieraus ergebenden Konsequenzen. Wir folgen diesem Zugang.

12.4 Impulserhaltung auf dem Billiardtisch

Als Übung zum Aufwärmen wollen wir uns nun die Impulserhaltung für einen Stoß zweier Kugeln auf einem Billiardtisch ansehen. Wir malen einen Kreidestrich in die Mitte des Billiardtisches, und schießen die beiden Kugeln von den gegenüberliegenden Enden des Tisches aufeinander zu, wobei sie mit gleicher Geschwindigkeit zwar nahe, aber auf verschiedenen Seiten der Linie entlang rollen, so dass sie sich in der Mitte treffen, wobei ihre Bewegungsrichtung um einen kleinen Winkel gedreht wird. Mit anderen Worten, wenn ihre Bewegungsrichtung anfangs parallel zur x–Richtung (der Kreidelinie) war, dann werden die Kugeln nach dem Stoß eine gleich große und entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeitskomponente in y–Richtung haben. (Die Geschwindigkeitskomponenten in x–Richtung werden sich dabei etwas verkleinert haben).

12.5 Ein symmetrischer Raumschiffzusammenstoß

Nun wollen wir diese Übung auf einer großen Skala wiederholen. Nehmen wir an, irgendwo im Weltraum, weit entfernt von irgendwelchen Gravitationsfeldern, legen wir ein eine Million Kilometer langes Band aus. (Es könnte zum Beispiel die beiden Uhren unseres Zeitdilatationsexperimentes verbinden.) Dieses Band entspricht der Kreidelinie auf unserem Billiardtisch. Wir nehmen nun an, zwei identische Raumschiffe nähern sich einander entlang des Bandes mit gleich großer, aber entgegengesetzt gerichteter Geschwindigkeit an, so dass sie sich in der Mitte des Bandes leicht berühren. Es ergibt sich offensichtlich aus der Symmetrie der Situation, dass der Impuls in beiden Richtungen erhalten bleibt. Insbesondere ist die Geschwindigkeit, mit der sich ein Raumschiff nach der Kollision von dem Band entfernt (die y–Komponente des Geschwindigkeitsvektors), gleich groß und entgegengesetzt zu der entsprechenden Geschwindigkeitskomponente des anderen Raumschiffs.
Wir wollen dieses Aufeinandertreffen nun aus der Sicht eines Beobachters in einem der beiden Raumschiffe, nennen wir es A, betrachten. Vor der Kollision

sieht er das Band schnell an seinem Fenster vorbei gleiten, in einem gleichbleibenden Abstand von sagen wir einigen Metern. Nach dem Stoß sieht er, wie sich das Band mit beispielsweise 15 Metern pro Sekunde von ihm wegbewegt. Dies liegt daran, dass das Raumschiff A bei dem Stoß eine Geschwindigkeitskomponente von 15 Metern pro Sekunde senkrecht zu dem Band aufgenommen hat. Gleichzeitig würde ein Beobachter auf Raumschiff B das gleiche beobachten, weil die Situation vollkommen symmetrisch ist.

12.6 Wie symmetrisch ist dieser Stoß eigentlich?

Die entscheidende Frage ist nun: *Wie schnell sieht ein Beobachter in Raumschiff A das Raumschiff B sich von dem Band entfernen?* Wir nehmen hierzu einmal an, dass sich das Raumschiff B relativ zu Raumschiff A entlang der x–Richtung (also in Richtung des Bandes) mit 0,6 c bewegt. Zunächst erinnern wir uns, dass Abstände, die man senkrecht zu der Bewegungsrichtung misst, nicht lorentzkontrahiert sind. Wenn Beobachter B aussagt, dass er sich in jeder Sekunde 15 Meter von dem Band entfernt, wird Beobachter A aus diesem Grunde mit B über die 15 Meter übereinstimmen — aber nicht über die Sekunde! Er wird vielmehr sagen, dass die Uhren von B langsamer gehen, so dass auf seinen Uhren 1,25 Sekunden vergangen sein werden, wenn B sich um 15 Meter in y–Richtung bewegt hat.
Es folgt, dass aus der Zeitdilatation resultiert, dass bei dem Stoß aus der Sicht des Raumschiffs A keine zwei identischen Geschwindigkeitskomponenten in y–Richtung resultieren. Ursprünglich bewegten sich die beiden Raumschiffe parallel zur x–Achse — die Impulskomponente in y–Richtung war also null. Wie können wir also argumentieren, dass der Gesamtimpuls *nach* dem Stoß null bleibt, wenn die beiden Raumschiffe (zumindest aus ihrer eigenen Sicht und nicht aus der Sicht eines außen stehenden Beobachters) *keine* gleich großen und entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeitskomponenten in y–Richtung haben?

12.7 Einstein rettet die Impulserhaltung

Einstein war sich so sicher, dass die Impulserhaltung ein allgemeingültiges Prinzip sein muss, dass er sie mit einer mutigen Hypothese rettete: die Masse eines Körpers muss von seiner Geschwindigkeit abhängen! Tatsächlich muss die Masse eines Körpers in solch einer Art und Weise mit der Geschwindigkeit zunehmen, dass sie die geringere Geschwindigkeit in y–Richtung, die sich aufgrund der Zeitdilatation ergibt, bei der Berechnung des Impulses genau ausgleicht. Das heißt, wenn ein Körper im Ruhezustand eine Masse M besitzt, wird er bei einer Geschwindigkeit v eine Masse

$$M' = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

haben. Es fällt auf, dass dieser Effekt bei normalen Geschwindigkeiten so klein ist, dass man ihn nicht nachweisen geschweige denn spüren kann. Nähert sich das Objekt aber der Lichtgeschwindigkeit, wächst die Masse ohne Grenzen an!

12.8 Die Masse nimmt mit wachsender Geschwindigkeit wirklich zu!

Den Entschluss zu fassen, dass die Masse von Körpern in dieser Weise von ihrer Geschwindigkeit abhängt, scheint ein teurer Preis zu sein, den man für die Rettung der Impulserhaltung bezahlen muss! Jedoch ist dies eine theoretische Vorhersage, die man leicht mit Hilfe von Experimenten überprüfen kann.
Die erste Bestätigung gab es im Jahre 1908, als man die Masse von schnellen Elektronen in einer Vakuumröhre bestimmte. Tatsächlich sind die Elektronen in der Bildröhre eines Farbfernsehers etwa ein halbes Prozent schwerer als ruhende Elektronen, und dieser Effekt muss bei der Berechnung der Magnetfelder, die sie auf die richtige Stelle am Bildschirm lenken sollen, berücksichtigt werden.
Viel dramatischer sind die Verhältnisse in modernen Teilchenbeschleunigern, die benutzt werden, um Elektronen, Protonen und andere Elementarteilchen zu beschleunigen. Bei deren Betrieb zeigt sich, dass diese Teilchen immer schwerer werden, wenn sich ihre Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit annähert, und daher benötigt man immer größere Kräfte, um sie weiter zu beschleunigen. Konsequenterweise ergibt sich hieraus, dass die Lichtgeschwindigkeit eine natürliche Höchstgeschwindigkeit ist, die nicht überschritten werden kann. Teilchen werden auf Geschwindigkeiten beschleunigt, wo ihre Masse tausende Male größer ist als ihre in Ruhe gemessene Masse, die man auch „Ruhemasse“ nennt.

12.9 Kinetische Energie und Masse von sehr schnellen Teilchen

Wir wollen nun über die kinetische Energie eines dieser Teilchen nachdenken, das sich mit einer Geschwindigkeit nahe c bewegt. Wir erinnern uns, dass wir weiter oben herausgefunden haben, dass die kinetische Energie einer gewöhnlichen nichtrelativistischen (d. h, sich langsam bewegenden) Masse m den Wert

$\frac{1}{2}mv^2$ hatte. Wir hatten diesen Ausdruck für die kinetische Energie herausgefunden, indem wir überlegt hatten, wie viel Arbeit man an der Masse verrichten musste, um sie bis in eine bestimmte Höhe zu heben — wir mussten eine gleich große Kraft wie die Gewichtskraft $m \cdot g$ ausüben, um die Masse um die Strecke h anzuheben, woraus sich für die verrichtete Arbeit bzw. in den Körper hineingesteckte Energie der Wert $m \cdot g \cdot h$ ergab. Als der Körper dann fallen gelassen wurde, verrichtete die Erdanziehungskraft G die gleiche Arbeitsmenge $m \cdot g \cdot h$ an dem Körper, wobei er beschleunigt und die potentielle Energie komplett in kinetische Energie umgewandelt wurde. Da wir wissen, wie schnell fallende Objekte ihre Geschwindigkeit vergrößern, waren wir in der Lage zu schlussfolgern, dass die kinetische Energie $\frac{1}{2}mv^2$ beträgt. (Für die Einzelheiten lese man bitte im vorangegangenen Abschnitt nach.)

Allgemeiner hätten wir die Masse mit einer konstanten Kraft F beschleunigen können, und die Arbeit (Kraft mal Weg) herausfinden können, die von der Kraft verrichtet wird, um den Körper aus dem Stand auf die Geschwindigkeit v zu beschleunigen. Die kinetische Energie der Masse, $W_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$, ist exakt gleich der Arbeit, die von der Kraft verrichtet wird, um den Körper auf diese Geschwindigkeit zu beschleunigen. (In einer ähnlichen Weise kann man zeigen, dass in dem Falle, dass sich ein Körper bereits mit der Geschwindigkeit u bewegt, die notwendige Arbeit für die Beschleunigung auf die Geschwindigkeit v nur noch $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$ beträgt.)

Es ist interessant, diese Übung für ein Teilchen zu wiederholen, das sich *annähernd mit Lichtgeschwindigkeit* bewegt, wie die Teilchen in den Beschleunigern, die wir vorhin erwähnt haben. Newtons zweites Axiom, in der Form

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \qquad \text{oder} \qquad \text{Kraft} = \text{Änderungsrate des Impulses}$$

gilt zwar immer noch, aber *in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit verändert sich die Geschwindigkeit kaum noch, wenn weiterhin eine Kraft ausgeübt wird* — stattdessen vergrößert sich die Masse! Wir können daher in sehr guter Näherung das folgende schreiben,

$$F = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot c \qquad \text{oder} \qquad \text{Kraft} = (\text{Änderungsrate der Masse}) \cdot c,$$

wobei wie gewöhnlich c die Lichtgeschwindigkeit darstellt. Um genauer zu werden, nehmen wir an, wir haben eine konstante Kraft F, die ein Teilchen anschiebt. Zu einem bestimmten Zeitpunkt hat das Teilchen die Masse M und eine Geschwindigkeit sehr nahe an c. Eine Sekunde später, wenn die Kraft immer noch wirkt und nach Newtons zweitem Axiom weiterhin den Impuls des Teilchens vergrößert, wird das Teilchen die Masse $M + m$ haben, wobei m die Massenzunahme aufgrund der von der Kraft verrichteten Arbeit ist.

Wie groß ist der Zuwachs der kinetischen Energie W_{kin} dieses Teilchens während dieses eine Sekunde dauernden Zeitraums? — In exakter Analogie zu dem oben beschriebenen nicht–relativistischen Fall, ist es einfach die Arbeit, die die Kraft in diesem Zeitraum verrichtet. Da sich die Masse des Teilchens in einer Sekunde um den Betrag m verändert, ist m also die Änderungsrate der Masse ($m = \frac{\Delta m}{\Delta t}$). Daher können wir ausgehend von Newtons zweitem Axiom in der Form

$$F = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot c$$

schreiben

$$F = mc.$$

Die *Zunahme der kinetischen Energie W_{kin} über die eine Sekunde dauernde Zeitspanne ist gerade gleich der Arbeit, die von der Kraft verrichtet wurde,*

$$W = F_s \cdot s.$$

Da sich das Teilchen fast mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, beträgt die zurückgelegte Wegstrecke, über die die Kraft während der einen Sekunde wirkt, ziemlich genau $3 \cdot 10^8$ Meter.
Daher beläuft sich die gesamte Arbeit, die während dieser Sekunde verrichtet wird, auf

$$W = F_s \cdot s = mc \cdot c = m \cdot c^2.$$

Daher lautet die Beziehung zwischen der Massenzunahme eines relativistischen Teilchens und seiner Zunahme an kinetischer Energie:

$$W = mc^2$$

(Diese Formel ist besser bekannt mit dem Buchstaben E für die Energie.)

12.10 Kinetische Energie und Masse von langsamen Teilchen

Erinnern wir uns, dass wir bei anwachsender Geschwindigkeit eine Massenzunahme um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ annehmen mussten, um die Newton'schen Axiome in allen Inertialsystemen gültig zu halten. Das bedeutet aber auch, dass sogar ein sich langsam bewegendes Objekt ein wenig an Masse zunimmt, wenn es sich bewegt!
In welcher Beziehung steht diese winzige Massenzunahme zu der kinetischen Energie? — Wir denken uns einen Körper der Masse M, der sich mit einer Geschwindigkeit v viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit bewegt. Seine kinetische Energie beträgt $W_{kin} = \frac{1}{2}Mv^2$, wie oben erwähnt. Seine Masse ist dann

$\frac{M}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, was wir als $M + m$ schreiben können. Was ist m? Für kleines v können wir die Näherungen

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

machen. (Diese Näherungen sind umso exakter, je kleiner $\frac{v}{c}$ wird, wie einfach auszuprobieren ist).
Das bedeutet, die Gesamtmasse bei der Geschwindigkeit v ist $M \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$, und wenn man das in der Form $M + dm$ schreibt, kann man sehen, dass die Massenzunahme dm gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{Mv^2}{c^2}$ ist. Hieraus folgt, dass die Massenzunahme — wiederum — in der Beziehung $W = mc^2$ zur kinetischen Energie W_{kin} steht.

12.11 Kinetische Energie und Masse beliebig schneller Teilchen

Wir haben in den beiden vorangegangenen Abschnitten gezeigt, dass wenn eine Kraft Beschleunigungsarbeit an einem Körper verrichtet, sie außerdem die Masse des Körpers um einen Betrag vergrößert, der gleich der Energiezunahme geteilt durch c^2 ist. Dieses Ergebnis ist über den gesamten Bereich möglicher Geschwindigkeiten bis hin zur Lichtgeschwindigkeit gültig, wie wir nun zeigen werden.
Für ein Teilchen der Masse m, die von einer konstanten Kraft F geradlinig beschleunigt wird, gilt der Zusammenhang

$$W = F_s \cdot s,$$

und damit für die kinetische Energie

$$W_{kin} = \int F\, ds$$

Nun ist aber

$$F = \frac{d}{dt} mv,$$

und daher gilt

$$W_{kin} = \int \frac{d}{dt}(m \cdot v)\, ds = \int \frac{ds}{dt}\, d(m \cdot v) = \int v\, d(m \cdot v).$$

Nach der Produktregel gilt

$$d(m \cdot v) = v \cdot dm + m \cdot dv = \left(v + m \cdot \frac{dv}{dm}\right) \cdot dm.$$

Wegen

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

gilt

$$\frac{dm}{dv} = \frac{m_0 \cdot v/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$$

Das heißt aber auch, dass

$$\frac{dm}{dv} = \frac{v/c^2}{1 - v^2/c^2} \cdot \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{v}{c^2 - v^2} \cdot m.$$

Für den Kehrwert des obigen Differentialquotienten gilt also

$$\frac{dv}{dm} = \frac{c^2 - v^2}{mv}.$$

Zusammen mit der obigen Gleichung erhalten wir dann

$$d(m \cdot v) = \left(v + \frac{c^2 - v^2}{v} \right) dm.$$

Für die kinetische Energie erhalten wir damit

$$W_{kin} = \int v \cdot d(m \cdot v) = \int c^2 \, dm = (m - m_0) \cdot c^2 = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 \right) c^2$$

Auf diese Weise haben wir gesehen, dass im allgemeinen Fall die Beschleunigungsarbeit, die an einem Körper verrichtet wird, also definitionsgemäß seine kinetische Energie, genau gleich seiner Massenzunahme multipliziert mit c^2 ist.
Um zu verstehen, warum dies im alltäglichen Leben nicht bemerkt wird, schauen wir uns noch ein Beispiel an, nämlich ein Düsenflugzeug mit einer Masse von 100 Tonnen, das sich mit 3600 km/h bewegt. 100 Tonnen sind 100 000 Kilogramm, 3600 km/h sind 1000 Meter pro Sekunde. Das entspricht einer kinetischen Energie $\frac{1}{2}Mv^2$ von $0,5 \cdot 10^{11}$ Joule, aber die hiermit verbundene Massenzunahme des Düsenflugzeuges ist um den Faktor $c^2 = 9 \cdot 10^{16}$ niedriger, was einer zusätzlichen Masse von etwa einem halben Milligramm entspricht, eine nicht sehr leicht feststellbare Größe!

12.12 Ein Warnhinweis zur Notation: m und m_0

Wir verwenden m_0, um die „Ruhemasse“ eines Objektes zu beschreiben, und m für seine relativistische Masse,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Mit dieser Notation folgen wir den Autoren French und Feynman. Krane und Tipler verwenden dagegen m für die Ruhemasse. Wenn man das m verwendet, so wie wir es in diesem Dokument tun, erhält man einfachere Formeln für den Impuls und die Energie, aber das geschieht nicht ganz ohne Gefahren. Man muss immer berücksichtigen, dass m keine Konstante, sondern eine Funktion der Geschwindigkeit ist. Außerdem darf man nicht vergessen, dass die relativistische kinetische Energie gleich $(m - m_0) \cdot c^2$ ist, und nicht etwa $\frac{1}{2}mv^2$, auch dann nicht, wenn man für m in der letzteren Formel den Ausdruck für die relativistische Masse einsetzt!
Beispiel: Gehe aus von $\frac{v^2}{c^2} = 0,99$, berechne die sich daraus ergebende kinetische Energie und vergleiche sie mit $\frac{1}{2}mv^2$ (unter Verwendung der relativistischen Masse).

13 Masse und Energie

13.1 Ruheenergie

Die Tatsache, dass sich die Masse eines Körpers erhöht, wenn man ihn mit Energie „füttert“, legt nahe, dass die Ruhemasse m_0 eines Körpers, multipliziert mit c^2, als eine Energiemenge angesehen werden kann. Die Wahrheit dieser Aussage kann man am besten bei Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen sehen. So gibt es zum Beispiel ein Teilchen namens Positron, das alle Eigenschaften eines Elektrons besitzt außer seiner elektrischen Ladung, denn die ist zwar gleich groß, aber positiv. Wenn ein Positron und ein Elektron nun mit geringer Geschwindigkeit kollidieren (so dass kaum kinetische Energie vorhanden ist), verschwinden beide in einem Blitz elektromagnetischer Strahlung. Dieser kann nachgewiesen und seine Energie gemessen werden. Diese Energie erweist sich als $2\,m_0\,c^2$, wobei m_0 die Ruhemasse des Elektrons bzw. Positrons ist.
Daher können Teilchen in pure Energie, d. h. elektromagnetische Strahlung „verdampfen“. Die Energie $m_0\,c^2$ eines ruhenden Körpers nennt man daher auch Ruheenergie. Wir sollten jedoch festhalten, dass ein Elektron nur vernichtet werden kann, wenn es auf ein Positron trifft, und normalerweise gibt es nur wenige Positronen um uns herum, denn sie kommen nicht sehr weit, bevor sie auf eines der zahlreich vorhandenen Elektronen treffen und vernichtet werden. (Es ist allerdings schon öfter der Vorschlag gemacht worden, dass manche Galaxien komplett aus Antimaterie bestehen!)

13.2 Einsteins Kiste

Ein amüsantes „Experiment“ zur Äquivalenz von Masse und Energie ist das folgende: Wir stellen uns eine verschlossene Kiste vor, die mit einem Blitzlicht an dem einen Ende und mit lichtabsorbierendem Material am anderen Ende ausgestattet ist. Wir stellen uns weiterhin vor, dass die Kiste weit draußen im Weltall ist, so dass keine Gravitationsfelder oder andere störende Einflüsse auf sie einwirken können. Wir nehmen nun an, dass das Blitzlicht einmal aufleuchtet, der Lichtblitz die Kiste entlang wandert und am anderen Ende absorbiert wird.

Nun weiß man aus der Maxwell–Theorie der elektromagnetischen Wellen, dass ein Lichtblitz, der die Energie E trägt, außerdem einen Impuls von $p = \frac{E}{c}$ besitzt. Daher erfährt die Kiste, wenn der Blitz die Lampe verlässt, gemäß dem Impulserhaltungssatz bzw. Newtons drittem Axiom wie bei einem abgefeuerten Gewehr einen Rückstoß. Wir nehmen an, der gesamte Apparat hat eine Masse M und wird mit der Geschwindigkeit v zurückgestoßen. Natürlich gilt dabei $v << c$.
Daraus folgt gemäß dem Impulserhaltungssatz

$$M \cdot v = \frac{E}{c}$$

Nach der Zeit $t = \frac{L}{c}$ trifft das Licht auf das entfernte Ende der Kiste auf, wird absorbiert, und die Kiste kommt damit wieder zur Ruhe. (Wir nehmen aufgrund der Annahme $v << c$ gleichzeitig an, dass die Strecke, die währenddessen von der Kiste zurückgelegt wurde, klein gegenüber der Länge der Kiste ist.)

Wie weit hat sich die Kiste fortbewegt? — Sie hat sich mit der Geschwindigkeit v während der Zeit t bewegt, daher hat sie sich um die Strecke $s = v \cdot t = \frac{v \cdot L}{c}$ fortbewegt. Aus der obigen Gleichung für die Impulserhaltung erhalten wir, dass $v = \frac{E}{Mc}$ ist, daher wird die von der Kiste zurückgelegte Strecke beschrieben durch

$$s = \frac{E \cdot L}{M \cdot c^2}$$

Nun ist die interessante Sache aber, dass es keine äußeren Kräfte gibt, die auf dieses System wirken, daher kann sich der Massenschwerpunkt des Systems nicht bewegt haben!
Die einzige Möglichkeit, damit das einen Sinn ergibt, besteht darin zu sagen, dass die Lichtenergie eine kleine Masse m über die Länge L verschoben haben muss, um die rückwärtige Bewegung der Masse M um die Strecke s auszugleichen, so dass

$$M \cdot s = m \cdot L,$$

und der Schwerpunkt bleibt an Ort und Stelle. Aus unserer obigen Formel für s können wir schließen, dass der für den Ausgleich nötige Wert für die Masse m

$$m = \frac{M}{L} \cdot s = \frac{M}{L} \cdot \frac{E \cdot L}{M \cdot c^2} = \frac{E}{c^2}$$

beträgt, so dass

$$E = m \cdot c^2$$

ist.

Wir haben auf diese Weise gezeigt, *dass der Transfer von Energie einen Transfer der äquivalenten Masse beinhaltet*. Das einzige, das wir hierfür annehmen mussten, war, dass der Massenschwerpunkt eines abgeschlossenen Systems in Ruhe bleibt, falls keine äußeren Kräfte auf ihn einwirken, und dass elektromagnetische Strahlung einen Impuls von $\frac{E}{c}$ mit sich trägt, wie es von den Maxwell'schen Gleichungen theoretisch vorhergesagt und experimentell bestätigt wird.
Aber wie wird dieser Massentransfer physikalisch realisiert? Ist das Ende der Kiste wirklich schwerer, nachdem es den Lichtblitz absorbiert hat? — Die Antwort lautet ja, weil es ein wenig heißer geworden ist, was bedeutet, dass die Atome ein wenig schneller vibrieren, und schneller bewegte Objekte haben eine größere Masse.

13.3 Masse und potentielle Energie

Wir nehmen nun an, dass sich an dem entfernten Ende der Kiste ein ruhendes Wasserstoffatom befindet. Wie wir später erörtern werden, kann man sich dieses als ein Proton vorstellen, an das ein Elektron über die elektrostatische Anziehung gebunden ist. Es ist überdies bekannt, dass ein Lichtblitz mit einer gesamten Energie von 13,6 eV gerade in der Lage ist, das Elektron von dem Proton zu trennen, so dass diese beiden Teilchen nach dem Auftreffen des Photons weit voneinander entfernt und in Ruhe sind. Die Energie des Lichtes wurde gebraucht, um das Proton und das Elektron voneinander zu entfernen — das heißt, die Lichtenergie wurde in potentielle Energie (Lageenergie) umgewandelt. Das Photon wird bei diesem Prozess absorbiert, und deshalb muss das entfernte Ende des Kastens an Masse zugenommen haben. Das heißt, dass ein ruhendes Proton plus ein weit davon entferntes ruhendes Elektron zusammen um den Betrag $\frac{E}{c^2}$ mehr wiegen als ein ruhendes Wasserstoffatom, wobei E gleich 13,6 eV beträgt. Daher zwingt uns „Einsteins Kiste" zu der Schlussfolgerung, dass eine Erhöhung der potentiellen Energie innerhalb eines Systems gleichzeitig eine entsprechende Vergrößerung der Masse zur Folge hat.
Es ist interessant, sich die Aufspaltung des Wasserstoffatoms in umgekehrter Richtung vorzustellen — wenn ein sich langsam bewegendes Elektron auf ein isoliertes Proton trifft, können sie sich zu einem Wasserstoffatom verbinden, wobei sie ein Photon mit 13,6 eV elektromagnetischer Strahlungsenergie aussenden. Natürlich hat das resultierende Wasserstoffatom dann entsprechend weniger Energieinhalt als das vorherige einzelne Proton und Elektron. Die tatsächliche Massendifferenz verhält sich zur Gesamtmasse etwa wie 1 zu 10^8. Dies ist typisch für eine heftige chemische Reaktion — da die meisten Atome um ein bis zwei Größenordnungen schwerer als Wasserstoffatome sind,

beträgt das Verhältnis meistens 1 zu 10^9 bis 10^{10}. Bei kernphysikalischen Prozessen liegen die Verhältnisse jedoch sehr verschieden, denn die Kernkräfte sind sehr viel stärker als die elektromagnetischen, daher sind die Bindungen auch sehr viel stärker. Wir werden dies später noch näher erläutern, aber wir geben an dieser Stelle ein kleines Beispiel — ein Wasserstoffkern kann mit einem Lithiumkern zu zwei Heliumkernen verschmelzen, und der Massenverlust beträgt $\frac{1}{500}$ der ursprünglichen Masse. Diese Reaktion ist beobachtet worden, und alle beteiligten Massen sind messbar. Die hierbei emittierte Energie beträgt 17 MeV. Dies ist die Art von Reaktionen, die bei Wasserstoffbomben stattfindet. Bemerken Sie, dass die freigesetzte Energie mindestens das Millionenfache der Energie beträgt, die bei der heftigsten chemischen Reaktion ensteht.
Letztes Beispiel — eine Abschätzung der Größenordnung der Massenänderung bei der Explosion von einer Million Tonnen TNT. Das TNT–Molekül ist etwa hundertmal schwerer als das Wasserstoffatom, und es setzt einige eV an Energie frei, wenn man es verbrennt. Die Massenänderung liegt also in der Größenordnung von $10^{-10} \cdot 10^6$ Tonnen, also etwa hundert Gramm. Bei einer Wasserstoffbombe würden etwa 50 Kilogramm Kernbrennstoff ausreichen, um die gleiche Energiemenge freizusetzen bzw. die gleiche Massenänderung zu erzielen.

13.4 Fußnote: Einsteins Kiste ist frei erfunden

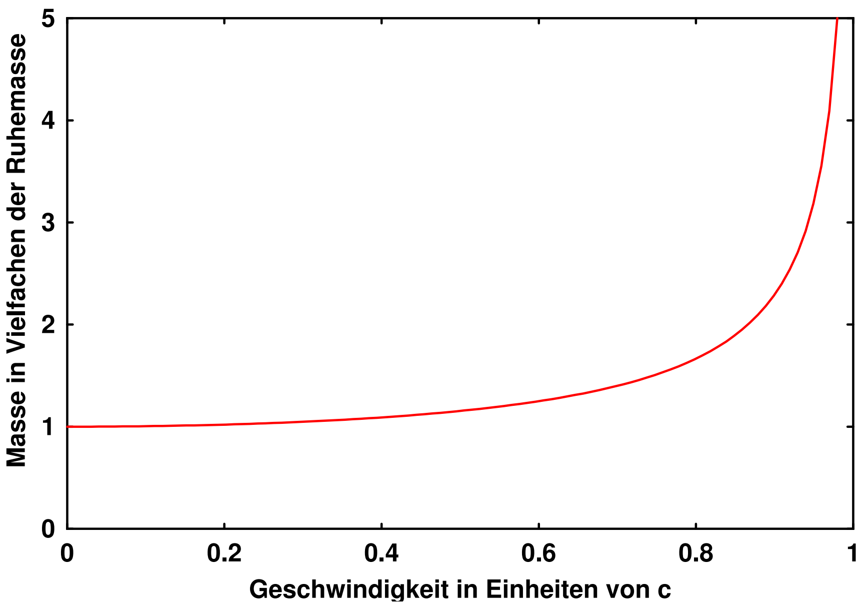
Obwohl Einsteins Kistenargument leicht zu verstehen ist und die richtige Lösung gibt, ist sie physikalisch gesehen frei erfunden — und zwar die starre Kiste. Wenn es eine hundertprozentig starre Kiste, oder auch nur einen Stock, gäbe, wären all unsere Uhrensynchronisationsprobleme gelöst — wir könnten die Uhren an beiden Enden des Stabes gleichzeitig starten, indem man den Stab am einen Ende etwas anschubst, und da es sich um einen starren Stock handelt, würde sich das andere Ende gleichzeitig bewegen. Leider gibt es keine solchen Materialien. Alle Materialien werden durch elektromagnetische Kräfte zusammengehalten, und wenn man das eine Ende anstößt, wird eine elastische Welle durch den Stock geschickt. Die elektrischen Kräfte passen sich mit Lichtgeschwindigkeit an, aber die gesamte Welle breitet sich durch den Stock sehr viel langsamer aus, weil jedes Atom in der Kette erst eine Weile beschleunigt werden muss, bevor es sich genügend bewegt, um das benachbarte Atom messbar zu beeinflussen. Daher würde der Lichtpuls das gegenüberliegende Ende des Kastens erreicht haben, bevor dieser begonnen hätte sich zu bewegen! Nichtsdestotrotz hat die wabbelige elastische Kiste einen vom Rückstoß erzeugten Impuls, den es verliert, wenn das Licht das gegenüberliegende Ende erreicht. Daher ist die grundlegende Argumentationslinie von oben weiterhin gültig. Der Physiker French gibt eine gültige Herleitung für die obige Situation, indem er die Kiste durch ihre beiden nicht miteinander verbundenen Enden ersetzt, welche er als ein einziges System behandelt.

14 Energie–Impuls–Formel

Wir haben eine Formel für die Gesamtenergie, $E_{ges} = E_{kin} + E_0$, mit

$$E_{ges} = m \cdot c^2 = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

so dass wir uns in der folgenden Graphik ansehen können, wie die Gesamtenergie von der Geschwindigkeit abhängt.



Der Impuls variiert mit der Geschwindigkeit nach der Formel

$$p = m \cdot v = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Es erweist sich, dass es nützlich ist, wenn man eine Formel für die Energie E in Abhängigkeit von p hat. Es gilt

$$E^2 = m^2 \cdot c^4 = \frac{{m_0}^2 \cdot c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

und daher

$$\begin{aligned} m^2 \cdot c^4 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) &= {m_0}^2 \cdot c^4 \\ m^2 \cdot c^4 - m^2 \cdot v^2 \cdot c^2 &= {m_0}^2 \cdot c^4 \\ E^2 = m^2 \cdot c^4 &= {m_0}^2 \cdot c^4 + m^2 \cdot v^2 \cdot c^2 \end{aligned}$$

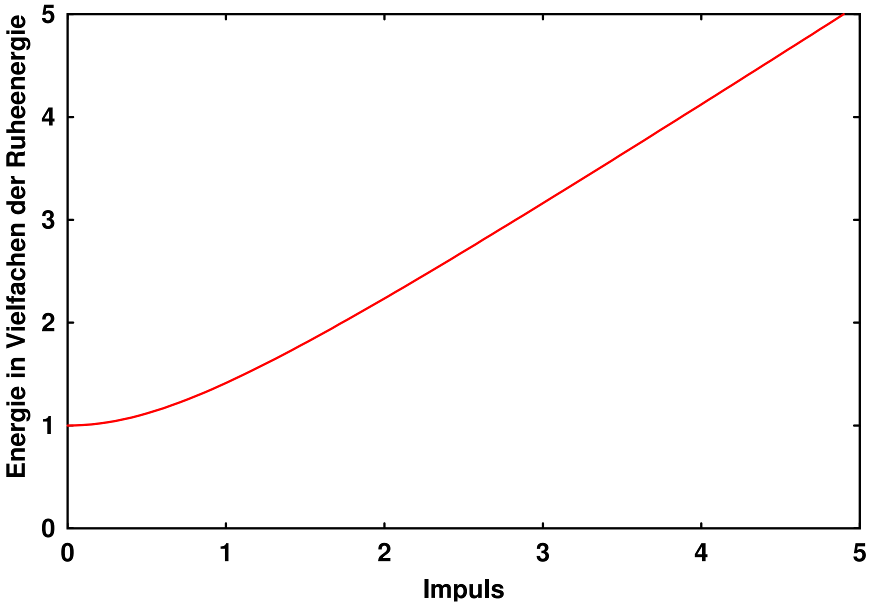
Hieraus folgt zusammen mit $p = m \cdot v$ die Gleichung

$$E = \sqrt{{m_0}^2 \cdot c^4 + c^2 \cdot p^2}.$$

Wenn p sehr klein ist, gilt die Näherung

$$E \approx m_0 \cdot c^2 + \frac{p^2}{2m_0},$$

die übliche klassische Formel.
Wenn p sehr groß ist, so dass $c^2 \cdot p^2 >> {m_0}^2 \cdot c^4$ ist, lautet die Näherungsformel $E = c \cdot p$.



Wir machen darauf aufmerksam, dass dieser Grenzwert für hohe Energien genau die Energie–Impuls–Beziehung ist, die Maxwell für das Licht herausgefunden hatte, für alle p. Diese Beziehung konnte nur dann für alle möglichen Impulse wahr sein, wenn ${m_0}^2 \cdot c^4 = 0$ ist, das heißt, wenn $m_0 = 0$ ist. Licht besteht tatsächlich aus „Photonen“ , Teilchen der „Ruhemasse Null“, wie wir später sehen werden. Die „Ruhemasse“ eines Photons ist bedeutungslos, da

Photonen niemals in Ruhe sind — der Ausdruck für die Energie eines Photons,

$$E = m \cdot c^2 = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

ist von der Form $\frac{0}{0}$, weil $m_0 = 0$ und $v = c$ gilt, daher kann „m" immer noch ungleich Null sein. Das bedeutet, dass die Masse eines Photons nur aus „Masse aufgrund von kinetischer Energie" besteht.
Bei sehr schnellen Elektronen, so wie diejenigen, die in Hochenergiebeschleunigern erzeugt werden, kann die zusätzliche Masse aufgrund kinetischer Energie die Ruhemasse um mehrere tausend Male übertreffen. Für diese Teilchen können wir die Ruhemasse vernachlässigen und $E = c \cdot p$ setzen.
Wir haben gezeigt, dass

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = \frac{m_0 \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

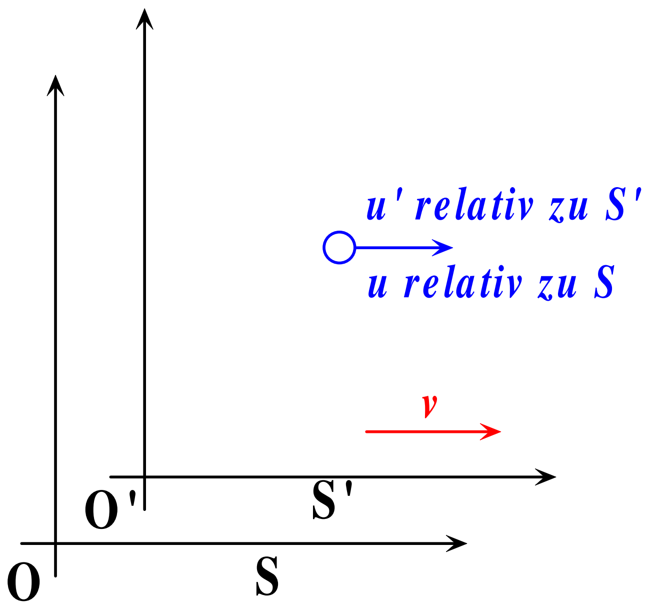
und

$$E = \sqrt{{m_0}^2 \cdot c^4 + c^2 \vec{p}^{\,2}}$$

gilt. Die letzte Gleichung können wir auch in der Form

$$E^2 - c^2 \cdot \vec{p}^{\,2} = {m_0}^2 \cdot c^4$$

schreiben. Das bedeutet, dass der Ausdruck $E^2 - c^2 \cdot \vec{p}^{\,2}$ nur von der Ruhemasse des betreffenden Teilchens sowie der Lichtgeschwindigkeit abhängt. Er hängt nicht von der Geschwindigkeit des Teilchens ab, also handelt es sich für einen bestimmten Partikel um eine Konstante, die nicht von der Wahl des Inertialsystems abhängt. Das erinnert uns an die Invarianz des Ausdrucks $\vec{x}^{\,2} - c^2 \cdot t^2$, den quadrierten Abstand zwischen zwei Ereignissen, bezüglich der Lorentztransformationen. Man könnte hieraus den Schluss ziehen, dass die Gesetze, die die Lorentztransformationen der Größen E und p zwischen zwei Inertialsystemen die gleiche Form haben wie diejenigen für x und t. Wir können diese Gesetze herleiten, um diese Vermutung zu überprüfen.
Wie gewöhnlich nehmen wir an, dass alle Geschwindigkeiten parallel zur x–Achse sind.



Wir denken uns das System S′ als in x–Richtung bewegt mit einer Geschwindigkeit von v relativ zum System S. Stellen wir uns außerdem ein Teilchen der Ruhemasse m_0 vor, das sich mit der Geschwindigkeit u' in die x'–Richtung des Systems S′ bewegt, und daher mit der Geschwindigkeit u entlang der x–Achse des Systems S, wobei

$$u = \frac{u' + v}{1 + \dfrac{v \cdot u'}{c^2}}$$

Die Energie und der Impuls im System S′ berechnen sich nach

$$E' = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{u'^2}{c^2}}}, \qquad p' = \frac{m_0 \cdot u'}{\sqrt{1 - \dfrac{u'^2}{c^2}}}$$

und in S:

$$E = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}, \qquad p = \frac{m_0 \cdot u}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}$$

Daher gilt

$$E = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{\left(\dfrac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}\right)^2}{c^2}}},$$

und man erhält

$$E = \frac{m_0 \cdot c^2 \cdot \left(1 + \dfrac{vu'}{c^2}\right)}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{u'^2}{c^2}\right)}}$$

Hieraus ergibt sich durch einfache Umformung der Ausdruck

$$E = \frac{E' + v \cdot p'}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$$

Ganz ähnlich können wir zeigen, dass gilt

$$p = \frac{p' + \dfrac{v \cdot E'}{c^2}}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}.$$

Dies sind die Lorentztransformationen für die Energie und den Impuls eines Teilchens — es ist einfach zu überprüfen, dass

$$E^2 - c^2 \cdot p^2 = E'^2 - c^2 \cdot p'^2 = {m_0}^2 \cdot c^4.$$

Für den Spezialfall eines Teilchens mit Ruhemasse gleich Null erhalten wir $E = c \cdot p$ und $E^2 - c^2 \cdot p^2 = 0$ in allen Inertialsystemen.
Daher erhält man außerdem

$$E = \frac{E' + v \cdot p'}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} = \frac{E' + v \cdot \dfrac{E'}{c}}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} = E' \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

sowie wegen $E = c \cdot p$ und $E' = c \cdot p'$ auch

$$p = p' \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}.$$

Es fällt auf, dass das Verhältnis der Energien in den beiden Bezugssystemen mit dem Verhältnis der Frequenzen übereinstimmt, die wir bei der Dopplerverschiebung gefunden haben.

15 Verwandlung von Energie in Masse: Teilchenerzeugung

Wir haben bereits erwähnt, wie man mit Hilfe eines Synchrotrons Protonen bis auf relativistische Geschwindigkeiten beschleunigen kann. Die Ruheenergie eines Protons beträgt $m_p\,c^2 = 938\,$MeV, wobei man hier die übliche Energieeinheit der Hochenergiephysiker benutzt: $1\,\mathrm{MeV} = 10^6\,\mathrm{eV}$. Das Neutron ist ein bisschen schwerer — $m_n\,c^2 = 940\,$MeV. (Die Masse des Elektrons beträgt dagegen nur 0,51 MeV.) Daher muss man, um ein Proton auf relativistische Geschwindigkeiten zu beschleunigen, diesem eine kinetische Energie in der Größenordnung von 1000 MeV oder 1 GeV verleihen.
Das Standardverfahren der Hochenergiephysiker besteht darin, Teilchen auf relativistische Geschwindigkeiten zu beschleunigen, und sie dann auf andere Teilchen aufprallen zu lassen, um zu sehen, was passiert. Zum Beispiel werden schnelle Protonen auf ruhende Protonen abgefeuert (zum Beispiel auf Wasserstoffatome — das Elektron kann vernachlässigt werden). Diese Proton–Proton–Zusammenstöße finden innerhalb eines Detektors statt, so dass die Ergebnisse beobachtet werden können. Ein weitverbreiteter Detektortyp ist die Blasenkammer: ein durchsichtiger Behälter gefüllt mit einer überhitzten Flüssigkeit. Das elektrische Feld eines sich schnell bewegenden geladenen Teilchens, das nahe an ein Molekül der Flüssigkeit gerät, kann ein Elektron loslösen, und daher hinterlässt ein hochenergetisches Teilchen, das sich durch die Flüssigkeit bewegt, eine Spur von ionisierten Molekülen. Diese können wiederum als Keimzelle für Blasen dienen, die schnell wachsen und dadurch die Teilchenspur sichtbar machen.
Was man nun bei einer p–p–Streuung bei relativistischen Geschwindigkeiten tatsächlich beobachtet, ist, dass oft mehr Teilchen herauskommen, als hineingeschickt wurden — Teilchen, die man Pionen nennt, $\pi^+,\ \pi^0,\ \pi^-$, können erzeugt werden. Das π^0 ist elektrisch neutral, das π^+ trägt genau die gleiche Ladung wie ein Proton. Man stellt experimentell fest, dass die elektrische Ladungsmenge bei solchen Stößen immer erhalten bleibt, egal, wie viele neue Teilchen entstanden sind. Außerdem bleibt die Baryonenzahl immer erhalten. Hierunter versteht man die Summe der Protonen und Neutronen.

Mögliche Szenarien sind:

$$p + p \quad \longrightarrow \quad p + p + \pi^0$$

und

$$p + p \quad \longrightarrow \quad p + n + \pi^+$$

Die Masse des neutralen Pions beträgt 135 MeV, die geladenen Pionen haben dagegen die Masse 140 MeV, wobei wir wie die Hochenergiephysiker dazu übergegangen sind, den Wert von $m\,c^2$ die „Masse“ zu nennen, da die Masse äquivalent zur Energie ist, und da bei der Erzeugung eines Teilchens bei einem Zusammenstoß die kinetische Energie reduziert und in Masse umgewandelt wird.
Ein Proton, das mit einer kinetischen Energie von 135 MeV angeflogen kommt und auf ein ruhendes Proton stößt, wird jedoch nicht in der Lage sein, ein neutrales Pion zu erzeugen. Das liegt daran, dass das herannahende Proton auch noch einen Impuls hat. Bei dem Zusammenstoß bleibt dieser Impuls erhalten, und daher werden die Teilchen nach dem Stoß zusammen auch die gleiche Menge an Impuls besitzen und damit aber auch kinetische Energie. Aus diesem Grund kann nicht die gesamte kinetische Energie des hereinfliegenden Protons in Masse umgesetzt werden. Die einfachste Methode, um herauszufinden, wie viel Energie das Proton haben muss, um ein neutrales Pion zu erzeugen, besteht darin, in das sogenannte Schwerpunktsystem zu wechseln, in dem sich die beiden Protonen anfänglich mit gleicher Geschwindigkeit aufeinander zu bewegen, so dass der Gesamtimpuls vor dem Stoß gleich Null ist. Offensichtlich muss in diesem Bezugssystem die kleinstmögliche kinetische Energie gerade ausreichen, um das π^0 zu erzeugen, wobei alle nach dem Stoß vorhandenen Teilchen (p,p,π^0) in Ruhe sind. Wenn die relativistische Masse der aufeinanderprallenden Protonen im Schwerpunktsystem gleich m ist, dann gilt für die Gesamtenergie

$$E = 2m\,c^2 = 2m_p\,c^2 + m_{\pi^0}\,c^2.$$

Wenn man die obigen Protonen- und Pionenmassen einsetzt, und außerdem die Beziehung $m = \frac{m_p}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ ausnutzt, erhalten wir als Resultat, dass die beiden Protonen beide mit einer Geschwindigkeit von $0,36\,c$ aufeinanderprallen müssen.
Wir dürfen nun aber nicht vergessen, dass dies die Geschwindigkeit im Schwerpunktsystem ist, und für die praktische Umsetzung, also zum Beispiel für das Design des Beschleunigers, müssen wir aber wissen, welcher Geschwindigkeit das im „Laborsystem“ entspricht — das ist das anfänglich beschriebene Bezugssystem, in dem eines der beiden Protonen in Ruhe war. Die beiden Systeme haben offenbar eine relative Geschwindigkeit von $0,36\,c$, daher muss man

zur Berechnung der Geschwindigkeit des bewegten Protons im Laborsystem $0,36\,c$ zu $0,36\,c$ addieren, wobei man wegen der Größe der Geschwindigkeiten das relativistische Geschwindigkeitsadditionstheorem verwenden muss, wobei man $0,64\,c$ erhält. Das bedeutet, dass das bewegte Proton eine relativistische Masse hat, die dem 1,3–fachen seiner Ruhemasse entspricht, und daher eine kinetische Energie von etwa 280 MeV.
Daher muss man für die Erzeugung eines Pions der Ruhemasse 135 MeV ein Proton zur Verfügung stellen, das mindestens 280 MeV kinetische Energie besitzt. Dies nennt man die „Schwellenenergie" für die Pionerzeugung. Diese „Ineffizienz" ergab sich, weil der Impuls auch erhalten bleibt, so dass die Teilchen nach dem Stoß eine nicht vernachlässigbare kinetische Energie besitzen.

15.1 Produktion von Antiprotonen

Wenn man die Energie des einfallenden Protons weiter erhöht, werden mehr Teilchen erzeugt, einschließlich des „Antiprotons" — ein negativ geladenes schweres Teilchen, das ein Proton in einem Energieblitz vernichten kann. Experimentell stellt sich heraus, dass ein Antiproton nur erzeugt werden kann, indem gleichzeitig ein Proton neu entsteht,

$$p + p \quad \longrightarrow \quad p + p + p + \bar{p}$$

Es fällt auf, dass man die elektrische Ladung mit weniger Energie erhalten hätte können, und zwar bei der Reaktion

$$p + p \quad \longrightarrow \quad p + p + \pi^+ + \bar{p},$$

aber diese Reaktion findet nicht statt — also ist die Erhaltung der elektrischen Ladung nicht das einzige Kriterium, nach dem Teilchen erzeugt werden. Das, was wir hier sehen, ist die experimentelle Bestätigung der Tatsache, dass die Erhaltung der Baryonenzahl, die bei den soeben diskutierten niedrigen Energien bei der Pionenerzeugung bedeutete, dass die Gesamtzahl der Protonen plus Neutronen erhalten bleibt, bei hohen Energien verallgemeinert werden muss, indem sie die Antiteilchen mit negativer Baryonenzahl in die Rechnung einbezieht. So erhält zum Beispiel das Antiproton die Baryonenzahl -1. Auf diese Weise wird die Erhaltung der Baryonenzahl analog zur elektrischen Ladungserhaltung: Neue Teilchen können nur bei genügend hoher Energie erzeugt werden, wenn die Gesamtladung und die Gesamtbaryonenzahl der neuen Teilchen insgesamt Null beträgt. (In Wirklichkeit gibt es noch weitere Erhaltungsgesetze, die wichtig werden, wenn noch exotischere Teilchen erzeugt werden, was wir eventuell später erörtern.) Wir sollten noch einmal betonen, dass dies experimentelle Erkenntnisse sind, die wir durch die Untersuchung von Millionen von Zusammenstößen relativistischer Teilchen gewonnen haben.

Einer der ersten modernen Teilchenbeschleuniger, der in den fünfziger Jahren in Berkeley gebaut wurde, wurde zu dem Zweck entworfen, Antiprotonen zu erzeugen, daher war es sehr wichtig, die Schwellenergie zur Erzeugung von Antiprotonen zu berechnen! Dies kann man mit derselben Methode tun, die wir oben bei der Pionenerzeugung angewendet haben, aber hier verwenden wir einen anderen Trick, der oft nützlich ist. Wir haben gezeigt, dass bei der Transformation der Energie und des Impulses von einem Bezugssystem in ein anderes die Gleichung

$$E^2 - c^2 \cdot p^2 = E'^2 - c^2 \cdot p'^2$$

gilt. Da die Lorentztransformationsgleichungen linear sind, verhält es sich so, falls wir ein Ensemble von Teilchen mit einer Gesamtenergie E und einem Gesamtimpuls p in dem einen System haben bzw. mit E' und p' in dem anderen, dass die Gleichung

$$E^2 - c^2 \cdot \vec{p}^{\,2} = E'^2 - c^2 \cdot \vec{p'}^{\,2}$$

immer noch gültig ist. Wir können diese Invarianz nutzen, um Informationen für das Laborsystem (L) aus dem Schwerpunktsystem (S) zu erhalten. Wenn wir berücksichtigen, dass im Schwerpunktsystem der Gesamtimpuls gleich Null ist, und dass im Laborsystem der Gesamtimpuls im einfallenden Proton vereinigt ist, erhalten wir die obigen Gleichungen in der Form

$$E_S^2 = \Big[(m_{bew} + m_0) \cdot c^2\Big]^2 - c^2 \cdot p_{bew}^2,$$

wobei m_0 die Ruhemasse des Protons, m_{bew} die relativistische Masse des bewegten Protons ist. Die Schwellenenergie für das Antiproton beträgt $E_S = 4m_0 \cdot c^2$, daher ergibt sich

$$16m_0^2 \cdot c^4 = m_{bew}^2\, c^4 + 2m_{bew}\, c^2 \cdot m_0\, c^2 + m_0^2\, c^4 - c^2\, p_{bew}^2,$$

und wenn man die Gleichung

$$m_{bew}^2\, c^4 - c^2\, p_{bew}^2 = m_0^2\, c^4$$

ausnutzt, erhält man

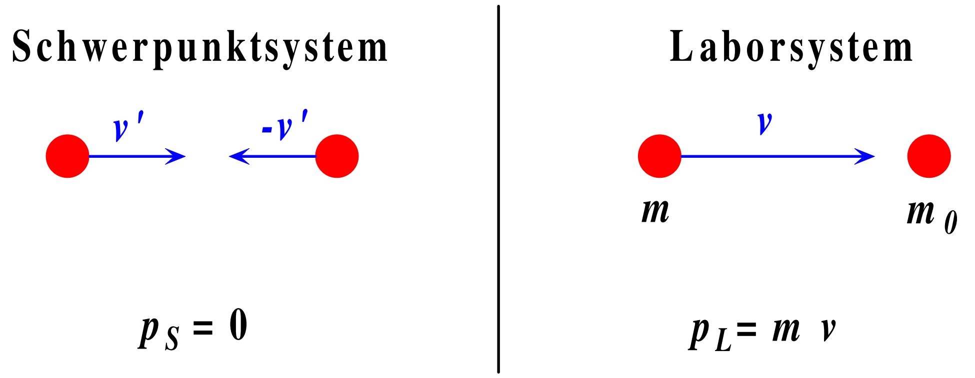
$$2(m_{bew}\, c^2)(m_0\, c^2) + 2(m_0\, c^2)^2 = 16(m_0\, c^2)^2,$$

so dass

$$m_{bew}\, c^2 = 7m_0\, c^2$$

ist. Daher ist es nötig, wenn man zwei zusätzliche Teilchen mit einer gesamten Ruheenergie von $2m_0\, c^2$ erzeugen will, dass das einfallende Proton einer kinetische Energie von $6m_0\, c^2$ besitzt. Der Beschleuniger von Berkeley hatte daher eine Energie von 6,2 GeV.

Wenn wir zu noch höheren Energien übergehen, wird diese „Ineffizienz“ noch schlimmer — stellen wir uns einmal Energien vor, so dass die kinetische Energie sehr viel größer ist als die Ruheenergie, und nehmen wir weiter an, dass das einfallende Teilchen die gleiche Ruhemasse hat wie das Teilchen, das als Target dient, nämlich m_0, wobei das einfallende Teilchen die relativistische Masse m hat (siehe Abbildung).



Im Laborsystem erhalten wir für die Gesamtenergie

$$E_L = (m + m_0) \cdot c^2.$$

Im Schwerpunktsystem gilt dagegen

$$\begin{aligned} E_S^2 &= E_L^2 - p_L^2 \cdot c^2 \\ &= m^2\, c^4 + 2m\, c^2 \cdot m_0\, c^2 + m_0^2\, c^4 - p_L^2\, c^2 \\ &= 2m_0\, c^2 \cdot (m\, c^2 + m_0\, c^2). \end{aligned}$$

Für $m >> m_0$ gilt

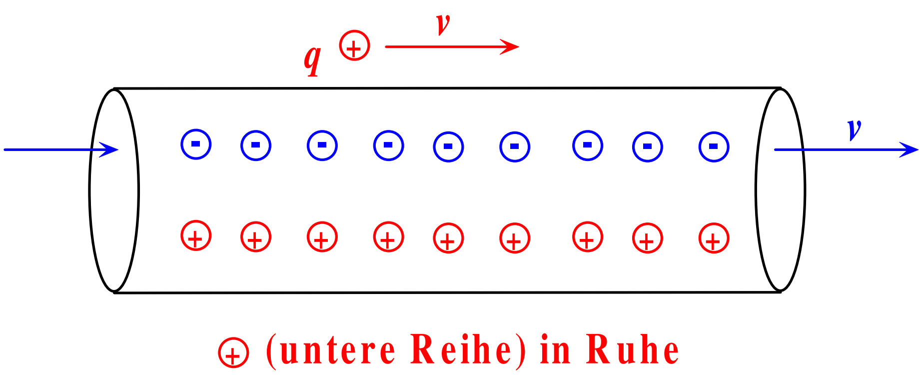
$$E_S^2 \approx 2m_0\, c^2 \cdot m\, c^2 \approx 2m_0\, c^2 \cdot E_L,$$

daher gilt näherungsweise

$$E_S \approx \sqrt{2m_0\, c^2 \cdot E_L}.$$

16 Wie Relativität die Elektrizität mit dem Magnetismus verbindet

Nehmen wir einmal an, wir haben einen unendlich langen geraden Draht, der eine durch Elektronen hervorgerufene Ladungsdichte von $-\lambda$ Coulomb pro Meter hat, wobei sich die Elektronen mit einer Geschwindigkeit von v nach rechts bewegen (wir erinnern uns, dass typische Geschwindigkeiten in der Größenordnung von Zentimetern pro Minute liegen), und einen positiv geladenen Hintergrund, der das Ganze für einen äußeren Betrachter neutral wirken lässt, also λ Coulomb pro Meter. Der Strom in dem Draht hat die Stärke $I = \lambda \cdot v$ (und fließt nach links). Wir stellen uns nun eine ebenfalls mit der Geschwindigkeit v bewegte positive Ladung q außerhalb des Drahtes vor, in einer Entfernung r von der Achse. (Natürlich sind sowohl die positiven wie die negativen Ladungen gleichmäßig über den Draht verteilt. Wir zeigen sie nur getrennt, damit man es leichter abbilden kann.)



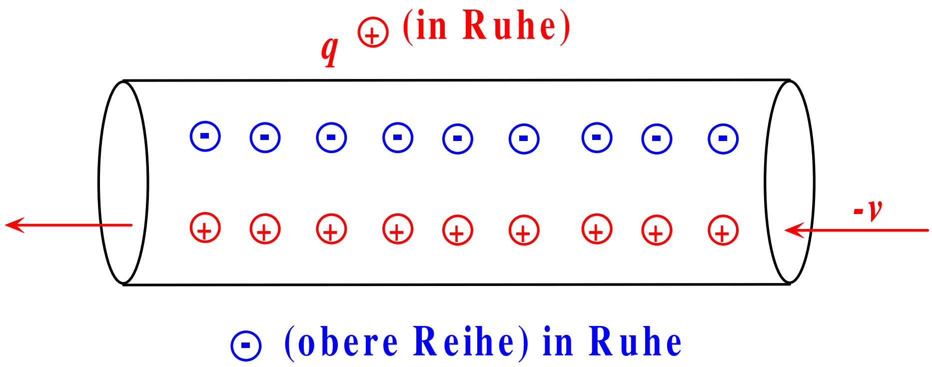
Welche Kraft spürt q? — Die magnetische Feldstärke beträgt $B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}$ (abgeleitet von der Gleichung $\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \cdot I$), und $I = \lambda \cdot v$, daher gilt

$$B = \frac{\mu_0 \cdot \lambda \cdot v}{2\pi \cdot r}.$$

Die magnetische Kraft F auf q beträgt $q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ und zeigt direkt von dem Draht weg, sie hat zusammen mit der obigen Gleichung den Betrag

$$F = \frac{q \cdot \mu_0 \cdot \lambda \cdot v^2}{2\pi \cdot r}.$$

Daher wird die Ladung von dem Draht weg beschleunigt werden, wenn die Ausgangssituation aussieht wie in der obigen Abbildung dargestellt.
Wir wollen nun das gleiche physikalische System in dem Bezugssystem untersuchen, in dem die Ladung ursprünglich in Ruhe ist. In diesem System sind die Elektronen auch in Ruhe, aber der positiv geladene Hintergrund fließt mit der Geschwindigkeit $-v$, wie in der Abbildung dargestellt.



Welche Kraft spürt q in diesem System? — Da die Ladung in Ruhe befindlich ist, kann sie keine magnetische Kraft verspüren, da solche Kräfte linear von der Geschwindigkeit abhängen.
Es sieht aber auch so aus, als könne die Ladung keine elektrische Kraft verspüren, weil die positiven und negativen Ladungen in dem Draht die gleiche Dichte haben. Daher könnten wir den Schluss ziehen, dass die Ladung q in diesem System überhaupt keine Kraft verspürt, und sich daher auch nicht bewegen wird. Aber wir haben gerade bewiesen, dass in dem anderen Bezugssystem die Ladung von dem Draht hinweg beschleunigt wird! Diese Aussagen können nicht beide gleichzeitig richtig sein — wenn sich q in dem einen System von dem Draht wegbewegt, muss es das in dem anderen System auch tun (wir erinnern uns daran, dass sich diese Systeme mit einer Geschwindigkeit von Zentimetern pro Minute relativ zueinander bewegen).
Der Fehler in der obigen Argumentation liegt darin, dass wir die Lorentzkontraktion vernachlässigt haben. Wenn wir (korrekt) annehmen, dass in dem System, in dem der Draht in Ruhe ist, die positiven und negativen Ladungen sich gegenseitig aufheben, so werden sie dies nicht länger in dem System tun, in dem die außen befindliche Ladung in Ruhe ist und der Draht sich bewegt. In diesem System bewegen sich die positiven Ladungen mit der Geschwindigkeit v, daher wird ihre Ladungsdichte in diesem System gleich $\frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ sein, weil sie

in dem anderen System gleich λ war. Da die Geschwindigkeit v sehr klein ist, können wir die zusätzliche Ladungsdichte annähern zu $\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}$.
In gleicher Weise sind die Elektronen in diesem System in Ruhe, daher wird ihre Ladungsdichte *verringert* um den Betrag $\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}$.
Diese beiden Effekte heben sich nicht gegenseitig auf, sondern addieren sich, so dass sich in diesem System insgesamt eine positive Ladungsdichte von $\lambda \cdot \frac{v^2}{c^2}$ ergibt. Verwenden wir den Ausdruck $\int \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}$ (eingeschlossene Ladung), finden wir ein äußeres elektrostatisches Feld der Stärke $\lambda \cdot \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot r}$. Dieses elektrostatische Feld übt eine Kraft auf die Ladung q aus, die

$$F = \frac{q \cdot \lambda \cdot v^2}{2\pi \cdot r} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0 \cdot c^2}$$

beträgt.
Aber es ist $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0$, und daher ist diese elektrostatische Kraft genauso groß wie die magnetische Kraft, die wir in dem anderen Bezugssystem beobachteten! Daher werden Beobachter in beiden Systemen darin übereinstimmen, mit welcher Beschleunigung das geladene Teilchen von dem Draht weg bewegt wird. Während der eine den Grund für diese Beschleunigung in einer magnetischen Kraft sehen wird, wird der andere ihn in einer elektrischen Kraft sehen. Wir müssen den Schluss ziehen, dass die Tatsache, ob eine spezielle Kraft auf ein geladenes Teilchen magnetisch oder elektrischer Natur ist, von dem gewählten Bezugssystem abhängt, daher resultiert die Unterscheidung zwischen elektrischen und magnetischen Kräften aus der menschlichen Anschauung.

17 Anmerkungen zur allgemeinen Relativitätstheorie

In Einsteins kleinem Buch *Relativität: Die spezielle und die allgemeine Theorie* führt er die allgemeine Relativitätstheorie mit einer Parabel ein. Er stellt sich vor, dass er in die Weiten des Weltalls hinausgeht, weit weg von allen Gravitationsfeldern, wo jeder beliebige Körper, der sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig fortbewegt, für eine lange Zeit in diesem Zustand verharrt. Er stellt sich vor, dort draußen eine Raumstation zu bauen — in seinen Worten „eine geräumige zimmerartige Kiste mit einem darin befindlichen Beobachter, der mit Messgeräten ausgestattet ist.“ Einstein betont, dass in dieser Kiste keine Gravitationseinflüsse zu spüren sind, so dass der Beobachter schwerelos in ihr herumschwebt.
In der Mitte des Deckels dieser „Kiste“ befindet sich ein Haken mit einem daran befestigten Seil, und ein nicht näher benanntes „Wesen“ zieht mit einer konstanten Kraft an diesem Seil. Die Kiste wird mitsamt dem Beobachter nach „oben“ konstant beschleunigt. Wie sieht das für den Mann in der Kiste aus? Er spürt, dass er sich nun zu dem Ende der Kiste hinbewegt, das man nun als den „Boden“ bezeichnen könnte, und dass er seine Beinmuskeln betätigen muss, um stehen zu können. Wenn er irgendetwas loslässt, dann wird es zum Boden hin beschleunigt, und tatsächlich werden alle Körper mit der gleichen Beschleunigung zu Boden fallen. Wenn er ein normaler Mensch wäre, würde er annehmen, dass sich der Raum in einem Gravitationsfeld befindet, und würde sich eventuell die Frage stellen, warum der Raum selbst nicht nach unten fällt. Er würde dann den Haken und das Seil entdecken und daraus den Schluss ziehen, dass der Raum an dem Seil aufgehängt ist.
Einstein fragt: Sollten wir diese fehlgeleitete Seele auslachen? Seine Antwort ist nein — die Sichtweise des Beobachters in der Kiste ist genauso gültig wie diejenige eines Außenstehenden. Mit anderen Worten: *Wenn man sich in einem gleichförmig beschleunigten Raum befindet (aus der Perspektive eines Außenstehenden) ist das physikalisch äquivalent*[1] *damit, dass man sich in einem homogenen Gravitationsfeld befindet*. Das ist das grundlegende Postulat der allgemeinen Relativitätstheorie. Die spezielle Relativitätstheorie sagte aus, dass alle Inertial-

[1] gleichbedeutend

systeme[2] äquivalent sind. Die allgemeine Relativitätstheorie dehnt den Gültigkeitsbereich dieser Aussage auf gleichmäßig beschleunigte Bezugssysteme aus und stellt fest, dass diese beschleunigten Bezugssysteme äquivalent zu unbeschleunigten Bezugssystemen sind, in denen ein Gravitationsfeld herrscht. Dies nennt man das *Äquivalenzprinzip*.
Die Beschleunigung könnte auch genutzt werden, um ein bestehendes Gravitationsfeld zu neutralisieren — so sind zum Beispiel die Passagiere in einem frei fallenden Fahrstuhl schwerelos, und die Bedingungen sind äquivalent zu einer unbeschleunigten Raumstation im Weltall.
Es ist wichtig zu erkennen, dass diese Äquivalenz zwischen einem Gravitationsfeld und der Beschleunigung nur deshalb möglich ist, weil die schwere Masse gleich der trägen Masse ist. Es gibt keine Möglichkeit, elektrische Felder auszulöschen, indem man zum Beispiel in ein beschleunigtes Bezugssystem wechselt, weil es viele verschiedene Ladungs- zu Masse–Verhältnisse gibt.

Bei der Entwicklung der Physik ist das Feldkonzept sehr wertvoll für das Verständnis der Interaktionen von Körpern gewesen. Wir veranschaulichen uns das elektrische Feld mit Hilfe von Feldlinien, die von einer Ladung ausgehen, und wissen, dass da etwas in der Umgebung der Ladung ist, das eine Kraft auf eine andere Ladung ausübt, die in die Nachbarschaft der felderzeugenden Ladung kommt. Wir können sogar die Energiedichte berechnen, die in dem elektrischen Feld gespeichert wird, die lokal proportional zu dem Quadrat der elektrischen Feldstärke ist. Man kommt leicht in Versuchung zu denken, dass es sich mit dem Gravitationsfeld sehr ähnlich verhält — schließlich handelt es sich ebenfalls um ein Feld, das mit dem Quadrat des Abstandes abnimmt. Offensichtlich ist dies jedoch nicht der Fall. Wenn das Gravitationsfeld durch einen Wechsel in ein beschleunigtes Bezugssystem zum Verschwinden gebracht werden kann, zumindest lokal, kann es nicht sein, dass es die Energie in einer solch einfachen lokalen Weise wie das elektrische Feld speichert.
Wir sollten betonen, dass der Wechsel in ein beschleunigtes Bezugssystem natürlich nur ein *homogenes* Gravitationsfeld auslöschen kann. Daher gibt es kein beschleunigtes Bezugssystem, in dem das gesamte Gravitationsfeld eines massiven Körpers gleich Null ist, da das Feld notwendigerweise an verschiedenen Orten der Umgebung des Körpers mit verschiedenen Intensitäten in verschiedene Richtungen zeigt.

[2] unbeschleunigte Bezugssysteme

17.1 Einige Konsequenzen des Äquivalenzprinzips

Wir stellen uns einen frei fallenden Fahrstuhl nahe der Erdoberfläche vor, und nehmen an, dass ein Laser, der in einer Wand des Aufzugs befestigt ist, einen Lichtpuls zu dem entsprechenden Punkt auf der gegenüberliegenden Wand schickt. Der Fahrstuhl, den wir als feldfrei annehmen, ist für einen mitfallenden Beobachter ein Inertialsystem, und das Licht wird sich sicherlich auf direktem Wege quer durch den Fahrstuhl bewegen. Wir stellen uns nun vor, dass der Fahrstuhl Fenster hat, und ein bezüglich der Erde in Ruhe befindlicher Außenstehender beobachtet hierdurch das Licht. Während das Licht den Aufzug durchquert, beschleunigt dieser natürlich mit g nach unten, und daher wird der außenstehende Beobachter natürlich auch den Schluss ziehen, dass der Lichtpuls mit g nach unten beschleunigt ist. Der Lichtstrahl könnte genau in dem Moment auf die Reise geschickt worden sein, als der Fahrstuhl gestartet wurde, daher liegt der Schluss nahe, dass die Bahnkurve des Lichtstrahls in einem homogenen Gravitationsfeld parabelförmig ist. Natürlich bewegt sich das Licht mit großer Geschwindigkeit, und daher ist der Lichtstrahl nur schwach gekrümmt! Nichtsdestotrotz *zwingt uns das Äquivalenzprinzip zu der Schlussfolgerung, dass Lichtstrahlen durch ein Gravitationsfeld gekrümmt werden*.

Die Krümmung von Lichtstrahlen durch ein Gravitationsfeld wurde erstmalig im Jahre 1919 experimentell nachgewiesen, und zwar, indem man Sterne bei einer totalen Sonnenfinsternis beobachtete, deren Licht nahe an der Sonne vorbei musste. Die Ablenkung des Sternenlichts betrug bei Sternen, die am Himmel nahe der Sonne standen, 1,7 Bogensekunden, was es erforderlich machte, die Sternpositionen auf der Photoplatte auf hundertstel Millimeter genau auszumessen, eine ziemliche Leistung für die damalige Zeit.

Man könnte den Schluss aus der kurzen obigen Darstellung ziehen, dass der Lichtstrahl in einem Gravitationsfeld einfach dem Weg folgt, den ein Masseteilchen im Newton'schen Sinne zurücklegen würde, wenn es sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen würde. Das ist nur im Grenzfall einer schwachen Abweichung von der geraden Linie in einem homogenen Feld richtig, aber es ist schon nicht mehr richtig, wenn man die Forderung nach einem homogenen Feld fallen lässt, wie es zum Beispiel bei dem Gravitationsfeld in der Nähe der Sonne (wie oben beschrieben) der Fall ist. Wir könnten versuchen, den Weg des Lichtes mit Hilfe einer Serie von (feuerfesten!) Fahrstühlen zu konstruieren, die alle auf den Mittelpunkt der Sonne zu fallen, und die alle vom Licht passiert werden, aber dann wären die Fahrstühle alle relativ zueinander beschleunigt (da sie alle radial fallen), und den Lichtweg durch die Fahrstühle zu bestimmen ist ziemlich kompliziert. Wenn man es richtig macht (wie es Einstein gelang), stellt sich heraus, dass der Winkel, um den der Lichtstrahl abgelenkt wird, doppelt so groß ist wie derjenige, der von einer naiven New-

ton'schen Theorie vorhergesagt würde.
Was passiert, wenn wir den Lichtpuls *vertikal nach unten* innerhalb des frei fallenden Fahrstuhls schicken, von einem Laser im Mittelpunkt der Decke auf einen Punkt in der Mitte des Fußbodens? Wir nehmen einmal an, dass der Lichtblitz die Decke in dem Moment verlässt, wenn der Fahrstuhl fallen gelassen wird. Wenn der Fahrstuhl die Höhe h hat, dauert es $\frac{h}{c}$, bis er den Fußboden erreicht. Das bedeutet, dass sich der Fußboden mit der Geschwindigkeit $\frac{gh}{c}$ nach unten bewegt, wenn das Licht auftrifft.

Frage: Wird ein Beobachter auf dem Boden des Fahrstuhls das Licht als dopplerverschoben wahrnehmen?
Die Antwort muss nein lauten, da aufgrund des Äquivalenzprinzips innerhalb des Fahrstuhls identische Bedingungen herrschen wie in einem feldfreien Inertialsystem. Es gibt nichts, was die Frequenz des Lichtes verändern könnte. Das bedeutet jedoch, dass für einen außenstehenden Beobachter, der sich ortsfest im Gravitationsfeld der Erde befindet, die Frequenz des Lichtes dopplerverschoben *ist.* Das liegt daran, dass er mit dem Fahrstuhlbeobachter darin übereinstimmen wird, welche Frequenz f das Licht in dem Moment hatte, als der Fahrstuhl in Bewegung gesetzt wurde. Wenn nun der Fahrstuhlfahrer darauf besteht, dass das Licht die gleiche Frequenz f beibehalten hat, wenn es auf den Fußboden auftrifft, der sich in dem Moment mit der Geschwindigkeit $\frac{gh}{c}$ relativ zu der Erde bewegte, wird der Beobachter auf der Erde sagen, dass das Licht die Frequenz $f \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right) = f\left(1 + \frac{gh}{c^2}\right)$, hat, wobei er die Formel für den optischen Dopplereffekt bei sehr geringen Geschwindigkeiten verwendet.
Wir folgern hieraus, dass das Licht, das in einem Gravitationsfeld nach unten scheint, zu einer immer höheren Frequenz verschoben wird. Wenn man den Laser dementsprechend in den Fahrstuhlboden einbaut und nach oben scheinen lässt, ist es genauso leicht einzusehen, dass Licht, das sich in einem Gravitationsfeld nach oben bewegt, zu niedrigeren Frequenzen, also rotverschoben wird.
Einstein schlug vor, dass diese Vorhersage dadurch überprüft werden kann, dass man bestimmte charakteristische Spektrallinien von Atomen beobachtet, die sich in der Nähe von besonders dichten Sternen befinden. Diese sollten im Vergleich zu den gleichen chemischen Elementen auf der Erde rotverschoben sein, was man dann auch im Experiment bestätigte. Seitdem ist diese Beobachtung mit viel höherer Genauigkeit wiederholt worden. Eine amüsante Konsequenz dieser Tatsache ist, dass die Zeit in verschiedenen Höhenlagen in unterschiedlicher Geschwindigkeit verstreicht, da die atomaren Schwingungen, die für die Emission von Licht verantwortlich sind, die genauesten Zeitmesser sind, die uns zur Verfügung stehen. Die Standard–Atomuhr der USA, die sich auf einer Meereshöhe von 1800 Metern in Boulder befindet, gewinnt jährlich 5 Mikrosekunden gegenüber einer identischen Uhr, die sich fast auf Mee-

reshöhe im Royal Observatory in Greenwich, England, befindet. Beide Uhren haben eine Ganggenauigkeit von einer Mikrosekunde pro Jahr. Das bedeutet, wenn man auf der Oberfläche eines Planeten mit einem starken Gravitationsfeld leben würde, würde man langsamer altern. Natürlich wäre es dann nicht unbedingt sehr gemütlich.

17.2 Allgemeine Relativitätstheorie und das GPS–System

Entgegen dem, was man vermuten könnte, hat die Tatsache, dass die Zeit in verschiedenen Höhen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit vergeht, bedeutsame praktische Konsequenzen. Eine wichtige alltägliche Anwendung, bei der diese Erkenntnisse benötigt werden, ist das GPS–System. Ein GPS–Ortungsgerät berechnet seinen Standpunkt, indem es Signale aufspürt, die von die Erde umkreisenden Satelliten in präzise abgestimmten Zeitintervallen ausgesendet werden. Wenn alle Satelliten ihr Signal gleichzeitig senden, und das GPS–Gerät Signale von vier verschiedenen Satelliten empfängt, dann wird es drei relative Zeitverzögerungen zwischen den empfangenen Signalen geben. Die Signale selber tragen die Information über die genaue Position des Satelliten, von dem sie ausgesendet wurden, zum Zeitpunkt der Ausstrahlung. Mit dieser Information kann das GPS–Gerät die Lichtgeschwindigkeit ausnutzen, um die gemessenen Zeitdifferenzen in Strecken umzurechnen, und danach mit Hilfe einer Triangulation seine Position auf der Erdoberfläche zu berechnen.
Dies muss allerdings mit sehr hoher Präzision durchgeführt werden! Wenn man sich vor Augen führt, dass das Licht in einer Nanosekunde etwa 30 cm zurücklegt, könnte ein Fehler in der Größenordnung von 100 Nanosekunden dazu führen, dass ein Flugzeug neben der Landebahn aufsetzt. Das bedeutet, dass die Uhren in den Satelliten, die die Ausstrahlung der Signale bestimmen, sicherlich keine 100 Nanosekunden pro Tag falsch gehen dürfen. Das ist eine relative Genauigkeit von 1 zu 10^{12}. Es ist leicht nachzuprüfen, dass sowohl die Zeitdilatation, die gemäß der speziellen Relativitätstheorie von der Geschwindigkeit der Satelliten herrührt, als auch die von der allgemeinen Relativitätstheorie vorhergesagte Zeitkorrektur aufgrund der unterschiedlichen Position im Gravitationspotential der Erde, viel größer als diese 100 Nanosekunden pro Tag sind. Daher müssen die Uhren in den Satelliten dementsprechend korrigiert werden. (Die Satelliten umrunden die Erde alle 12 Stunden, weshalb sie einen Abstand von etwa Erdradien haben. Die Berechnung der Zeitdilatation aufgrud der Geschwindigkeit des Satelliten, sowie die Veränderung im Zeitablauf aufgrund des Gravitationspotentials, wird dem Leser als Übung überlassen.) Weitere Details kann man in der Vorlesung von Neil Ashby unter der URL „http://vishnu.nirvana.phys.psu.edu/mog/mog9/node9.html“ nachle-

sen.
Ashby berichtet, dass in der Tat, als die erste Caesiumuhr im Jahre 1977 in die Erdumlaufbahn geschickt wurde, die Entwickler noch dermaßen skeptisch gegenüber der allgemeinen Relativitätstheorie waren, dass die Uhr nicht gemäß dem vorhergesagten Effekt der gravitationsbedingten Rotverschiebung korrigiert wurde. Aber — nur für den Fall, dass Einstein doch Recht hatte — war der Satellit mit einem Synthesizer ausgestattet worden, der wenn nötig angeschaltet werden konnte, um die erforderliche allgemein–relativistische Korrektur anzubringen. Nachdem man die Uhr drei Wochen lang mit abgestelltem Synthesizer hatte laufen lassen, fand man heraus, dass die Uhr genau um den Betrag von einer identischen Uhr am Boden abwich, den die spezielle plus die allgemeine Relativitätstheorie vorhersagte, abgesehen von der bauartbedingten Ungenauigkeit der Uhr. Dieses einfache Experiment bestätigte die vorhergesagte gravitationsbedingte Rotverschiebung bis auf etwa ein Prozent Genauigkeit! Der Synthesizer wurde angestellt und blieb angestellt.

Michael Fowler, University of Virginia; Übers. Christoph Scholz

Quelle (und weitere Texte im Original): *http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/*

Index